technische universität dortmund

fakultät für mathematik

Prof. Dr. B. Schweizer
Dr. M. Kniely

Wintersemester 2020/21
12.11.2020

Festkörpermechanik

Blatt 2

Abgabe bis Donnerstag, den 19.11.2020, um 12:00

Aufgabe 1 (Rekonstruktion zweiter Ableitungen).
Sei $n \geq 2$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ zusammenhängend. Weiterhin sei $u \in C^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie folgende Relation für den symmetrischen Gradienten $e := \nabla^s u$ und seine Ableitungen:

$$\partial_j \partial_k u_i = \partial_j e_{ik} + \partial_k e_{ij} - \partial_i e_{jk} \quad \text{für alle } i, j, k \in \{1, \dots, n\} .$$

Aufgabe 2 (Lamé-Konstanten II: reine Zugbelastung).
Wir betrachten wieder den Elastizitätstensor $\mathbb{A} \colon \mathbb{R}^{n\times n}_s \to \mathbb{R}^{n\times n}_s$ gegeben durch $e \mapsto \sigma := 2\mu\, e + \lambda \operatorname{spur}(e)\,\mathrm{id}$. Zeigen Sie, dass sich $\mathbb{A}$ invertieren lässt mit der Gleichung

$$e = \frac{1}{2\mu}\left(\sigma - \frac{\lambda}{2\mu + n\lambda}\operatorname{spur}(\sigma)\,\mathrm{id}\right).$$

Für $n = 3$ und $\varepsilon, \delta \in \mathbb{R}$ ist eine *reine Zugdeformation* gegeben durch $u(x) = \varepsilon x_1 e_1 - \delta x_2 e_2 - \delta x_3 e_3$. Bestimmen Sie ε und δ in Abhängigkeit von λ, μ und $\sigma_0 \in \mathbb{R}$ im Fall

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Stellen Sie die Verbindung zum Young'schen Elastizitätsmodul μ_Y her.

Bemerkung: Der Quotient $\nu := \delta/\varepsilon$ heißt Poissonzahl. Er gibt das Verhältnis von lateraler Stauchung δ zur Ausdehnung in Zugrichtung ε an.

Aufgabe 3 (Varianten der Korn'schen Ungleichung).
In der Vorlesung wurde gezeigt, dass sich Satz 25.4 (Korn mit infinitesimaler Rotation) mit Satz 25.5 (Korn mit L^2-Norm von u) beweisen lässt. Zeigen Sie, dass auch die umgekehrte Implikation gilt und die beiden Sätze somit äquivalent sind.

Hinweis: Auch für diese Implikation bietet sich ein Widerspruchsbeweis an.