Prof. Dr. B. Schweizer
Dr. M. Kniely

Wintersemester 2020/21
05.11.2020

Festkörpermechanik

Blatt 1

Abgabe bis Donnerstag, den 12.11.2020, um 12:00

Aufgabe 1 (Differentialoperator der Elastizität).
Sei $\mathbb{A}\colon \mathbb{R}^{n\times n}_s \to \mathbb{R}^{n\times n}_s$, $e \mapsto 2\mu e + \lambda\,\mathrm{spur}(e)\,\mathrm{id}$ der Elastizitätstensor. Zeigen Sie, dass sich das lineare Modell der Elastizitätstheorie,

$$-\nabla\cdot\sigma = f\,,\quad \sigma = \mathbb{A}\nabla^s u \quad \text{in } \Omega\,,$$

schreiben lässt als

$$-\mu\Delta u - (\mu+\lambda)\nabla(\nabla\cdot u) = f \quad \text{in } \Omega\,.$$

Folgern Sie für $f=0$ und glatte Lösungen u in 2 und 3 Dimensionen: Sowohl $\nabla\cdot u$ als auch $\mathrm{curl}\; u$ sind harmonisch.[1] Schließen Sie daraus, dass u biharmonisch ist, $\Delta\Delta u = 0$.

Aufgabe 2 (Lamé-Konstanten I: Scherung und Kompression).
Wir betrachten die Elastizitätsgleichungen

$$-\nabla\cdot\sigma(x) = 0\,,\quad \sigma(x) = \mathbb{A}\nabla^s u(x) \quad \text{für alle } x\in\Omega\,,$$

im dreidimensionalen Raum, wobei $\mathbb{A}\colon \mathbb{R}^{3\times 3}_s \to \mathbb{R}^{3\times 3}_s$ durch die Vorschrift $\mathbb{A}e = 2\mu e + \lambda\,\mathrm{spur}(e)\,\mathrm{id}$ gegeben ist für $\mu,\lambda \geq 0$. Für $\varepsilon\in\mathbb{R}$ ist eine Scherung gegeben durch

$$u(x) = \varepsilon x_2 e_1,$$

und eine gleichmäßige Kompression/Expansion ist gegeben durch

$$u(x) = \varepsilon x.$$

Zeigen Sie, dass Scherung und Kompression Lösungen der Elastizitätsgleichungen sind und geben Sie den Spannungstensor σ sowie $\nabla^s u$ an.

(Bitte wenden)

[1] In 2 Raumdimensionen ist der curl-Operator durch die Vorschrift $\mathrm{curl}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $(u_1,u_2)\mapsto -\partial_2 u_1 + \partial_1 u_2$ gegeben.

Aufgabe 3 (Symmetrische und antisymmetrische Matrizen).
Es sei $n \geq 2$. Auf dem Raum $X = \mathbb{R}^{n \times n}$ der reellen $n \times n$-Matrizen definieren wir das Skalarprodukt $\langle A, B \rangle \coloneqq A : B \coloneqq \sum_{k,l} A_{kl} B_{kl}$. Weiterhin seien zwei Operatoren $P_s, P_a \colon X \to X$ durch

$$P_s \colon B \mapsto \frac{1}{2}(B + B^T)$$

und

$$P_a \colon B \mapsto \frac{1}{2}(B - B^T)$$

gegeben.

i) Zeigen Sie, dass P_s und P_a Projektionen sind, d.h. P_s und P_a sind linear und erfüllen $P_s^2 = P_s$ bzw. $P_a^2 = P_a$.

ii) Beweisen Sie die orthogonale Zerlegung

$$X = P_s X \oplus_\perp P_a X \, .$$

iii) Bestimmen Sie für $n = 2$ den Tensor 4. Stufe, $\mathbb{A} = (\mathbb{A}_{ij}^{kl})_{ij}^{kl}$, der die Projektion P_s beschreibt.