Prof. Dr. B. Schweizer
Klaas Poelstra

Sommersemester 2018
15.06.2018

Evolutionsgleichungen

Blatt 5

Abgabe bis zum 22.06.2018

Aufgabe 1 (Adjungierte Operatoren).
Seien X, Y Hilberträume und

$$A : D(A) \subset X \to Y$$

ein dicht definierter linearer Operator. Zeigen Sie, dass der adjungierte Operator A^* abgeschlossen ist.

Aufgabe 2 (Wellengleichung, nicht-symmetrischer Fall).
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes und glatt berandetes Gebiet. Wir betrachten auf $X = L^2(\Omega)$ den unbeschränkten Operator $A : D(A) \subset X \to X$, der durch $D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ und

$$Au(x) = \sum_{i,j} \partial_i(a_{ij}\partial_j u) + \sum_i b_i \partial_i u + cu$$

für $u \in D(A)$ definiert ist. Dabei sind die Koeffizienten a_{ij}, b_i, c allesamt $C^\infty(\overline{\Omega})$-Funktionen, und a_{ij} gleichmäßig elliptisch.

Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$\partial_t^2 \overline{u}(x,t) - A\overline{u} = 0 \quad \text{in } \Omega \times (0, \infty)$$

eine ω-kontraktive Halbgruppe erzeugt.

Verfahren Sie im Wesentlichen wie im symmetrischen Fall, der in der Vorlesung behandelt wurde. Nutzen Sie darüber hinaus folgende Hinweise:

(i) Wir können o. E. annehmen, dass $a_{ij} = a_{ji}$.

(ii) Setzen sie $u(x,t) = \overline{u}(x,t)e^{-\alpha t}$ für ein hinreichend großes $\alpha > 0$ und betrachten Sie die Gleichung für das Paar

$$(u, \partial_t u + \frac{\alpha}{2} u).$$

(iii) Benutzen Sie auf $H_0^1(\Omega)$ das Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle_1 := \left\langle \left(\frac{\alpha^2}{4} - A_0 \right) u, v \right\rangle_{L^2(\Omega)},$$

wobei A_0 den Hauptteil des Operators A bezeichnet,

$$A_0 u(x) = \sum_{i,j} \partial_i(a_{ij}\partial_j u).$$

Aufgabe 3 (Plattengleichung).

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes und glatt berandetes Gebiet. Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$\partial_t^2 u + \Delta^2 u = 0, \quad u(t) \in H_0^2(\Omega)\ \forall t,$$

auf dem Raum $X = H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ eine Halbgruppe erzeugt.