Prof. Dr. B. Schweizer
Klaas Poelstra

Sommersemester 2018
01.06.2018

Evolutionsgleichungen

Blatt 4

Abgabe bis zum 08.06.2018

Aufgabe 1 (Spektrum von $-\partial_x$).
Sei X einer der unten genannten Funktionenräume und $A = -\partial_x$. Bestimmen Sie $\sigma(A)$ in jedem der folgenden Fälle:

(i) $X = L^2(\mathbb{R})$ und $D(A) = H^1(\mathbb{R})$

(ii) $X = L^2((0,1))$ und $D(A) = H^1((0,1)) \cap \{u \mid u(0) = 0\}$

(iii) $X = L^2((0,1))$ und $D(A) = H^1((0,1))$

Aufgabe 2 (Hille-Yosida für $M \neq 1$).
Sei $\omega \in \mathbb{R}$ und $M > 0$, sowie $(A, D(A))$ ein linearer Operator auf einem Banachraum X. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) $(A, D(A))$ erzeugt eine stark stetige Halbgruppe $S(t)$ mit $\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}$.

(ii) $(A, D(A))$ ist abgeschlossen und dicht definiert; zudem gilt für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\Re\lambda > \omega$, dass $\lambda \in \rho(A)$ und

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(\Re\lambda - \omega)^n} \qquad \forall n \geq 1.$$

Anleitung für (i) $\Rightarrow$ (ii): Sowohl in Lemma 2.5 als auch in Satz 2.17 haben wir eine Identität für $R(\lambda, A)$. Leiten Sie diese jeweils $(n-1)$-fach nach λ ab, um eine Identität für $R(\lambda, A)^n$ zu erhalten.

Anleitung für (ii) $\Rightarrow$ (i): Nehmen Sie o. E. $\omega = 0$ an.

(a) Zeigen Sie, dass für $\mu > 0$ durch

$$\|u\|_\mu = \sup_{n \geq 0} \|\mu^n R(\mu, A)^n u\|$$

eine äquivalente Norm auf X definiert ist.

(b) Zeigen Sie, dass

$$\|R(\lambda, A)\|_\mu \leq \frac{1}{\lambda}$$

für $0 < \lambda \leq \mu$.

(c) Zeigen Sie, dass
$$\|u\|_\lambda \leq \|u\|_\mu$$
für $u \in X$ und $0 < \lambda \leq \mu$.

(d) Zeigen Sie, dass durch
$$\|u\|_{sup} = \sup_{\mu > 0} \|u\|_\mu$$
ebenfalls eine äquivalente Norm auf X definiert wird und
$$\|R(\lambda, A)\|_{sup} \leq \frac{1}{\lambda}$$
für alle $\lambda > 0$ gilt.

(e) Folgern Sie mit dem Satz von Hille-Yosida für kontraktive Halbgruppen (Satz 3.1), dass der Operator A eine $\| \cdot \|_{sup}$-kontraktive (und insbesondere stark stetige) Halbgruppe erzeugt.