Prof. Dr. B. Schweizer
Klaas Poelstra

Sommersemester 2018
16.05.2018

Evolutionsgleichungen

Blatt 3

Abgabe bis zum 25.06.2018

Aufgabe 1 (Der Erzeuger der Wärmeleitungs-Halbgruppe).
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet und $X = L^2(\Omega)$. Wir betrachten auf X die Wärmeleitungshalbgruppe $(S(t))_{t\geq 0}$ mit homogenen Dirichlet-Randwerten. Zu $u_0 \in X$ und $t \geq 0$ sei

$$u \in C^0([0,t]; L^2(\Omega)) \cap L^2(0,t; H_0^1(\Omega))$$

die eindeutige schwache Lösung von

$$\partial_t u = \Delta u, \quad u(0) = u_0.$$

Wir setzen dann

$$S(t)u_0 = u(t).$$

Bestimmen Sie den Erzeuger $(A, D(A))$ der Halbgruppe $(S(t))_{t\geq 0}$.

Anleitung:

(i) Entwickeln Sie $u \in X$ in Eigenfunktionen von $-\Delta$ (mit Nullrandwerten) und stellen Sie damit $S(t)u$ explizit dar.

(ii) Überlegen Sie, was die Bedingung $u \in D(A)$ für die Koeffizienten der Entwicklung bedeutet.

(iii) Zeigen Sie, dass im Fall $u \in D(A)$ die Partialsummen der Entwicklung nicht nur in $L^2(\Omega)$ konvergieren, sondern sogar schwach in $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

(iv) Zeigen Sie andererseits für $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, dass $u \in D(A)$ und $Au = \Delta u$.