Prof. Dr. B. Schweizer
Klaas Poelstra

Sommersemester 2018
26.04.2018

Evolutionsgleichungen

Blatt 2

Abgabe bis zum 04.05.2018

Aufgabe 1 (Satz vom abgeschlossenen Graphen).
Seien X, Y Banachräume und $A : X \to Y$ ein linearer Operator. Zeigen Sie: Der Operator A ist genau dann stetig, wenn der Graph

$$\Gamma(A) = \{(x, Ax) \mid x \in A\} \subset X \times Y$$

abgeschlossen ist.

Hinweis: Verwenden Sie den Satz von der offenen Abbildung. Dieser besagt, dass eine stetige lineare Abbildung zwischen Banachräumen genau dann surjektiv ist, wenn sie offen ist.

Aufgabe 2 (Reskalierte Halbgruppe).
Sei $S(t)$ eine ω-kontraktive Halbgruppe auf einem Banachraum X. Zeigen Sie, dass

$$T(t)u := e^{-\omega t} S(t)u$$

eine kontraktive Halbgruppe auf X definiert, und bestimmen Sie den Erzeuger von $T(t)$.

Aufgabe 3 (Resolventenabschätzung nicht erfüllt).
Wir betrachten den Banachraum

$$X = \{u \in L^2(\mathbb{R}_+) \mid u|_{(0,1)} \in H^1((0,1))\}$$

mit der natürlichen Norm

$$\|u\|_X^2 = \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+)} + \|\nabla u|_{(0,1)}\|^2_{L^2((0,1))}, \quad u \in X.$$

(i) Geben Sie den natürlichen Definitionsbereich $D(A)$ für den Operator $A = \partial_x$ auf X an.

(ii) Zeigen Sie, dass $D(A) \subset X$ dicht ist.

(iii) Zeigen Sie, dass $\lambda \in \rho(A)$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\Re\lambda > 0$.

(iv) Zeigen Sie, dass keine Resolventenabschätzung gilt, also kein $M \in \mathbb{R}$ existiert, sodass

$$\|R(\lambda, A)\| \le \frac{M}{\Re\lambda}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\Re\lambda > 0$.

Aufgabe 4 (Die Wellengleichung).
Wir betrachten auf einem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ die Wellengleichung

$$\partial_t^2 u = \Delta u, \quad u|_{\partial\Omega} = 0.$$

(i) Testen Sie die Gleichung mit $\partial_t u$ und begründen Sie so, warum wir Lösungen erwarten mit

$$u \in C^0((0,T), H_0^1(\Omega)), \quad \partial_t u \in C^0((0,T); L^2(\Omega)).$$

(ii) Formulieren Sie die Gleichung als $\partial_t U = AU$ mit einem geeigneten Banachraum X und einem Operator $A : X \supset D(A) \to X$.

(iii) Bestimmen Sie (formal) den Definitionsbereich $D(A) \subset X$.

(iv) Zeigen Sie $\lambda \in \rho(A)$ für $\lambda > 0$.