Prof. Dr. B. Schweizer
Klaas Poelstra

Sommersemester 2018
12.04.2018

Evolutionsgleichungen

Blatt 1

Abgabe am 18.04.2018 in der Vorlesung

Aufgabe 1 (Stetigkeitseigenschaften der Verschiebungsdynamik).
Sei $1 \le p \le \infty$ und $X = L^p(\mathbb{R})$. Wir definieren die lineare Halbgruppe $S(t)$ auf X als die Rechtsverschiebung

$$(S(t)u_0)(x) = u_0(x - t)$$

für $u_0 \in X$, $x \in \mathbb{R}$ und $t \ge 0$. Zeigen Sie:

(i) Die Halbgruppe ist nicht gleichförmig stetig.

(ii) Im Fall $p = \infty$ ist $S(t)$ nicht stark stetig.

Aufgabe 2 (Die Methode der Charakteristiken).
Wir betrachten zu einem vorgegebenen Vektorfeld $b \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ auf $\mathbb{R}^n$, das zudem Lipschitz-stetig ist, die lineare Evolutionsgleichung

$$\partial_t u(t,x) = -b(x) \cdot \nabla_x u(t,x), \quad u(0,\cdot) = u_0 \tag{1}$$

mit vorgegebenen Anfangswerten $u_0 \in X := C^1(\mathbb{R}^n)$.

(i) Der *Fluss* $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ von b ist definiert durch die Gleichungen

$$\phi(0,x) = x, \quad \partial_t \phi(t,x) = b(\phi(t,x)), \quad x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}.$$

Begründen Sie, dass $\phi_t := \phi(t,\cdot)$ invertierbar ist, und sowohl ϕ_t als auch ϕ_t^{-1} C^1-Funktionen sind.

(ii) Wir definieren auf X die lineare Halbgruppe $S(t)$ durch

$$(S(t)u_0)(x) = u_0(\phi_t^{-1}(x)), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Zeigen Sie, dass $u(t,x) = (S(t)u_0)(x)$ eine C^1-Funktion definiert und die Gleichung löst.

(iii) Wir nehmen nun an, dass $\nabla \cdot b = 0$ in $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass $\|u(t,\cdot)\|_{L^p} = \|u_0\|_{L^p}$ für alle $t \ge 0$ und alle $1 \le p \le \infty$.

Aufgabe 3 (Fourier-Reihen).
Wir können in $X = L^2((0,\pi),\mathbb{R})$ die Evolutionsgleichung

$$\partial_t u(t,x) = \Delta u(t,x), \quad u(.,0) = u_0 \in X$$

lösen, indem wir eine Fourierentwicklung durchführen:

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_{0k} \sin(kx), \quad u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin(kx), \quad u_k(t) = u_{0k} e^{-k^2 t}.$$

Wir finden so eine Lösung mit homogenen Dirichlet-Randwerten, also $u(\cdot,0) \equiv u(\cdot,\pi) \equiv 0$.

(i) Was für eine Gleichung lösen wir, wenn wir nicht in Sinusfunktionen, sondern in Kosinusfunktionen entwickeln?

(ii) Was passiert, wenn wir die Dirichlet-Lösung in Kosinusfunktionen entwickeln? Können wir schließen, dass die Lösung auch homogene Neumann-Randwerte hat?

Aufgabe 4.
Wir haben in der Vorlesung die Wärmeleitungsgleichung mit drei verschiedenen Methoden gelöst. Zeigen Sie die dafür jeweils benötigten a priori Abschätzungen:

(i) *Entwicklung in Eigenfunktionen.* Für die approximativen Lösungen

$$u_n(t,x) = \sum_{k=1}^{n} u_{0k} e^{-\lambda_k t} v_k$$

gilt

$$\int_0^T \int_\Omega |\nabla u_n(t,x)|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \le \frac{1}{2} \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

(ii) *Galerkin-Verfahren.* Für die Lösungen $u_n \in C^1(\mathbb{R}_+, X_n)$ von

$$\partial_t u_n(t) = P_n \Delta u_n(t), \quad u_n(0) = P_n u_0$$

gilt die gleiche Abschätzung.

(iii) *Rothe-Methode.* Für die Funktionen $u_k \in H^1_0(\Omega)$, die iterative definiert sind durch

$$\frac{u_k - u_{k-1}}{\Delta t} = \Delta u_k, \quad k = 1, 2, \ldots$$

gilt die Abschätzung

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta t \int_\Omega |\nabla u_k|^2 \le \frac{1}{2} \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}.$$