Prof. Dr. B. Schweizer
Klaas Poelstra, M. Sc.

Technische Universität Dortmund
Sommersemester 2021

Einführung in die Partiellen Differentialgleichungen

Blatt 11

Abgabe bis Montag, 5. Juli 2021, 14:00 Uhr

Aufgabe 1 (Entwicklung in eine Fourier-Reihe). *(7 Punkte)*

Wir betrachten das folgende Anfangs-Randwertproblem auf $\Omega = (0,1)$ für die Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} \partial_t u(x,t) &= \partial_x^2 u(x,t) && \forall\ (x,t) \in \Omega \times (0,\infty), \\ u(0,t) &= u(1,t) = 0 && \forall\ t \in (0,\infty), \\ u(x,0) &= u_0(x) && \forall\ x \in \Omega. \end{aligned}$$

Für das Anfangsdatum gelte $u_0 \in C^1([0,1])$ mit $u_0(0) = u_0(1) = 0$. Geben Sie eine Darstellung der Lösung mit einer Fourier-Reihe an.

Hinweis: Die ungerade Fortsetzung von u_0 kann auf $(-1,1)$ in eine Fourier-Reihe entwickelt werden.

Aufgabe 2 (Der Klang einer Trommel). *(7 Punkte)*

Die Auslenkung der Membran $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ sei beschrieben durch

$$u : \Omega \times (0,\infty) \ni (x,t) \mapsto u(x,t) \in \mathbb{R}\,.$$

Bei einem Dämpfungsfaktor $b > 0$ lautet die gedämpfte Wellengleichung für u

$$\frac{1}{c^2}\partial_t^2 u - \Delta u = -2b\partial_t u \quad \text{in } \Omega \times (0,\infty)$$

mit der Dirichlet-Bedingung $u = 0$ auf $\partial\Omega \times (0,\infty)$ und den Anfangsbedingungen $u(\cdot,0) = u_0$ und $\partial_t u(\cdot,0) = u_1$ auf Ω.

Sei (u_k) Basis aus Eigenfunktionen zum Operator $-\Delta : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ mit Eigenwerten (λ_k). Geben Sie mit Hilfe dieser Eigenfunktionen formal die allgemeine Lösung des Problems an. Welche Mischung aus Frequenzen hört man nach langer Zeit?

Aufgabe 3 (Schrödinger-Gleichung). *(6 Punkte)*

Die Schrödinger-Gleichung lautet, für normierte physikalische Parameter und ein Potential $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $V = V(x)$,

$$i\partial_t u = \Delta u + V \cdot u\,. \tag{1}$$

Stellen Sie für Lösungen der Form $u(x,t) = U(x)e^{i\omega t}$ fest, welche Art von Gleichung U lösen muss. Schreiben Sie außerdem in (1) die Gleichungen für Realteil und Imaginärteil getrennt.