Prof. Dr. B. Schweizer
Klaas Poelstra, M. Sc.

Technische Universität Dortmund
Sommersemester 2021

Einführung in die Partiellen Differentialgleichungen
Blatt 8

Abgabe bis Montag, 7. Juni 2021, 14:00 Uhr

Aufgabe 1 (Äquivalente Definitionen für subharmonische Funktionen). *(5 Punkte)*

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass für u die drei folgenden Begriffe äquivalent sind: subharmonisch im Distributionssinn, subharmonisch im Mittelwertsinn, subharmonisch im Viskositätssinn.

Aufgabe 2 (Monotonie der Mittelwerte). *(5 Punkte)*

Für $u \in C^0(B_R(0), \mathbb{R})$ und $0 < r < R$ definieren wir den Mittelwert

$$M_r(u) := \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r} u.$$

Zeigen Sie

a) Für $u \in C^2(B_R(0), \mathbb{R})$ gilt
$$\frac{d}{dr} M_r(u) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{B_r} \Delta u.$$

b) Ist $u \in C^0(B_R(0), \mathbb{R})$ (viskositäts-)subharmonisch, dann folgt aus a), dass $r \mapsto M_r(u)$ auf $(0, R)$ monoton nicht-fallend ist.

Aufgabe 3 (u^2 auch subharmonisch). *(5 Punkte)*

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $u \in C^2(\Omega)$ mit $u \geq 0$ in Ω. Zeigen Sie: Falls u im Distributionssinn subharmonisch ist, also

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \leq 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \text{ mit } \varphi \geq 0$$

gilt, dann ist auch die Funktion u^2 im Distributionssinn subharmonisch.

Aufgabe 4 (Äußere Kugelbedingung). *(5 Punkte)*

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Zeigen Sie: Falls $\partial\Omega$ in $x_0 \in \partial\Omega$ eine äußere Kugelbedingung erfüllt, dann ist x_0 ein regulärer Randpunkt.