PROF. DR. B. SCHWEIZER
KLAAS POELSTRA, M. SC.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DORTMUND
Sommersemester 2021

Einführung in die Partiellen Differentialgleichungen

Blatt 7

Abgabe bis Montag, 31. Mai 2021, 14:00 Uhr

Aufgabe 1 (Das Newton-Potential). *(5 Punkte)*

Sei $n = 2$ und $\Phi(x) = \frac{-1}{2\pi} \log|x|$ oder $n \geq 3$ und $\Phi(x) = \frac{1}{n(n-2)|B_1(0)|}|x|^{-n+2}$ das Newton-Potential. Weiterhin sei $f \in C_c^2(B_r(0))$ rotationssymmetrisch und $u := \Phi * f$.

(a) Zeigen Sie, dass u rotationssymmetrisch ist, also $u(Rx) = u(x)$ für jede Rotationsmatrix $R \in SO(n)$.

(b) Zeigen Sie, dass

$$u(x) = \Phi(x) \int_{B_r(0)} f(y)\, dy \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n \text{ mit } |x| > r.$$

Aufgabe 2 (Fundamentallösung für $n = 1$). *(5 Punkte)*

Finden Sie eine Fundamentlösung ϕ auf $\mathbb{R}$, also ϕ mit $-\Delta\phi = \delta_0$. überprüfen Sie, ob $u = \phi * f$ für $f \in C_c^0(\mathbb{R})$ eine Lösung von $-\Delta u = f$ ist.

Aufgabe 3 (Spiegelung am Kreisrand). *(5 Punkte)*

Sei $B_1(0)$ der Einheitskreis in $\mathbb{R}^2$, $f \in C^0(\overline{B_1(0)}, \mathbb{R})$. Sei außerdem $u \in C^2(\overline{B_1(0)}, \mathbb{R})$ mit $\Delta u = f$ in $B_1(0)$. Wir setzen

$$w(x) := \begin{cases} u(x) & \text{für } r := \|x\| \leq 1 \\ -u(\frac{x}{r^2}) & \text{für } r > 1. \end{cases}$$

Zeigen Sie $\Delta w = g$ auf $\mathbb{R}^2 \backslash \partial B_1(0)$ mit

$$g(x) := \begin{cases} f(x) & \text{für } r < 1 \\ -\frac{1}{r^4} f\left(\frac{x}{r^2}\right) & \text{für } r > 1. \end{cases}$$

Zusatz: Falls $u = 0$ auf $\partial B_1(0)$, ist dann $\nabla\langle w\rangle$ darstellbar durch eine $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$-Funktion? Bemerkung: Aus dem Ergebnis kann man folgern, dass im Distributionssinn $\Delta\langle w\rangle = \langle g\rangle$ auf ganz $\mathbb{R}^n$ gilt.

Aufgabe 4 (Ein Neumann-Problem im Halbraum). *(5 Punkte)*

Es sei $\Omega = \mathbb{R}^n_+$ der Halbraum mit Rand $\partial\Omega \equiv \mathbb{R}^2$, $\rho \in C^0_c(\mathbb{R}^2)$ eine Ladungsdichte auf $\partial\Omega$. Wir betrachten

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\rho(y)}{|x - (y, 0)|} \, d\mathcal{L}^2(y).$$

Beweisen Sie, dass u harmonisch ist und die Randbedingung

$$\lim_{x_3 \to 0} \partial_3 u(\bar{x}, x_3) = -\rho(\bar{x})$$

erfüllt. Anleitung: Interpretieren Sie die Integraldarstellung von $\partial_3 u(\bar{x}, 1/m)$ als Faltung von ρ mit einer Dirac-Folge.