Prof. Dr. B. Schweizer
Klaas Poelstra, M. Sc.

Technische Universität Dortmund
Sommersemester 2021

Einführung in die Partiellen Differentialgleichungen

Blatt 5

Abgabe bis Montag, 17. Mai 2021, 14:00 Uhr

Aufgabe 1 (Grüne-Ampel-Problem). *(5 Punkte)*

Lösen Sie die Verkehrsfluss-Erhaltungsgleichung aus Blatt 4 Aufgabe 3 für das Grüne-Ampel-Problem $u_0(x) = \rho_{jam}$ für $x < 0$ und $u_0(x) = \rho_{jam}/2$ für $x > 0$. Geben Sie die Lösung u an. Skizzieren Sie zusätzlich die Trajektorien für einzelne Fahrzeuge.

Aufgabe 2 (Gegenbeispiele zur distributionellen Konvergenz). *(5 Punkte)*

Geben Sie Beispiele an für Folgen mit den folgenden Eigenschaften:

(a) $u^\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u^\varepsilon \to 0$ punktweise fast überall, aber für ein $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}} u^\varepsilon \varphi \not\to 0\,.$$

(b) $u^\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u^\varepsilon \to 0$ punktweise fast überall und $u^\varepsilon \to 0$ in $L^1(\mathbb{R})$; zudem $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Aber für ein $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}} f(u^\varepsilon) \varphi \not\to 0\,.$$

Aufgabe 3 (Distributionsableitungen). *(5 Punkte)*

Bestimmen Sie die Distributionsableitungen der folgenden Funktionen $u : D \to \mathbb{R}$.

(a) $D = (-1,1) \subset \mathbb{R}$, $\qquad u(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x < 0, \\ x, & \text{falls } x \geq 0. \end{cases}$

b) $D = (-1,1) \subset \mathbb{R}$, $\qquad u(x) := \operatorname{sign}(x) = \begin{cases} -1, & \text{falls } x < 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0, \\ 1, & \text{falls } x > 0. \end{cases}$

c) $D = B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$, $\qquad u(x) = |x|$.

Aufgabe 4 (d'Alembert-Formel). *(5 Punkte)*

Zeigen Sie, dass die d'Alembert-Formel

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(u_0(x+t) + u_0(x-t)\right) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} u_1(y)dy\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,,\ t > 0\,,$$

für $u_0, u_1 \in L^1(\mathbb{R})$ eine distributionelle Lösung der eindimensionalen Wellengleichung $\partial_t^2 u = \Delta u$ liefert.