

Einführung in die Partiellen Differentialgleichungen

Blatt 4

Abgabe bis Montag, 10. Mai 2021, 14:00 Uhr

Aufgabe 1 (Erhaltungsgleichung).

(5 Punkte)

Sei $u = u(x, t)$ konstant entlang aller Strahlen, die durch den Ursprung laufen: $u(ax, at)$ ist unabhängig von a . Differenzieren Sie nach a und stellen Sie so eine Erhaltungsgleichung für u auf. Lösen Sie mit Hilfe von Charakteristiken durch $\{t = 1\}$. Schließen Sie, dass u nur von der Variablen x/t abhängt.

Aufgabe 2 (Parametrisierung mit Charakteristiken).

(5 Punkte)

Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes über Umkehrfunktionen, dass die Funktion Γ aus Satz E.4 eine differenzierbare Inverse besitzt.

Aufgabe 3 (Verkehrsfluss).

(5 Punkte)

Ein Modell für den Verkehrsfluss auf Autobahnen ist wie folgt: $u = u(x, t)$ sei die Dichte von Autos um den Punkt x zur Zeit t . Die Geschwindigkeit eines Autos sei maximal c_{\max} . Wir wollen modellieren, dass die typische Geschwindigkeit der Autos geringer ist, wenn viele Autos unterwegs sind, wir gehen hier von dem einfachen Gesetz $c(u) = c_{\max} \left(1 - \frac{u}{u_{\text{jam}}}\right)$ aus. Die Flussfunktion ist Autodichte mal Autogeschwindigkeit, also $f(u) = uc(u)$. Wir betrachten das Riemannproblem zu $\partial_t u + \partial_x [f(u)] = 0$ mit Anfangswerten u_0 von der Form $u_0(x) = u_l$ für $x \leq 0$ und $u_0(x) = u_r$ für $x > 0$.

- (a) Lösen Sie für $u_r = u_{\text{jam}}$.
- (b) Lösen Sie für $u_l = u_{\text{jam}}/4$ und $u_r = u_{\text{jam}}/2$.

Mit welcher Geschwindigkeit wandert jeweils das Stauende?

Aufgabe 4 (Schocklösungen).

(5 Punkte)

Wir betrachten Schock-Lösungen u mit den Werten u_l und u_r auf den beiden Seiten der Schocklinie; der Schock bewege sich mit der Rankine-Hugoniot-Geschwindigkeit $\lambda = [f]/[u]$. Zeigen Sie: Für glatte strikt konvexe Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

- (a) Lax-Schock-Bedingung $f'(u_l) > \lambda > f'(u_r)$
- (b) Charakteristikenrelation: $f'(u_l) > f'(u_r)$
- (c) Wertrelation $u_l > u_r$