Prof. Dr. B. Schweizer
Klaas Poelstra, M. Sc.

Technische Universität Dortmund
Sommersemester 2021

Einführung in die Partiellen Differentialgleichungen

Blatt 3

Abgabe bis Montag, 3. Mai 2021, 14:00 Uhr

Aufgabe 1 (Wellengleichung). *(5 Punkte)*

Bestimmen Sie auf $\mathbb{R} \times [0, \infty)$ durch die Auswertung der d'Alembert-Formel die formale Lösung u zur Wellengleichung $\partial_t^2 u = \partial_x^2 u$ mit Anfangswerten

$$u(x,0) = \begin{cases} 1 & \text{für } |x| < 1 \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \qquad \partial_t u(.,0) = 0\,.$$

Überlegen Sie, inwiefern die Anfangswerte angenommen werden.

Aufgabe 2 (Maxwell-Gleichungen). *(5 Punkte)*

Wir betrachten Vektorfelder $E, B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, die zweimal stetig differenzierbar sind. Differentialoperatoren werden auf Vektorfelder stets komponentenweise angewandt, also zum Beispiel

$$\Delta E = (\Delta E_1,\, \Delta E_2,\, \Delta E_3)\,.$$

a) Beweisen Sie
$$\text{curl curl } E = -\Delta E + \text{grad div } E.$$

b) Seien $E, B : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $E = E(x,t)$, $B = B(x,t)$ zweimal stetig differenzierbare Lösungen der Maxwell-Gleichungen,
$$\begin{aligned} \text{div}_x\, E = 0, &\qquad \text{div}_x\, B = 0\,, \\ \frac{\partial E}{\partial t} = \text{curl}_x\, B, &\qquad \frac{\partial B}{\partial t} = -\,\text{curl}_x\, E\,. \end{aligned}$$
Beweisen Sie, dass E und B Wellengleichungen erfüllen,
$$\partial_t^2 E - \Delta E = 0, \qquad \partial_t^2 B - \Delta B = 0.$$

Aufgabe 3 (Maximumprinzip). *(5 Punkte)*

Sei $n = 1$ und $L > 0$. Betrachten Sie für $c \in \mathbb{R}$ das elliptische Randwertproblem

$$-u_{xx} + cu \;=\; f \quad \text{ in } (0, L), \qquad u(0) \;=\; u(L) \;=\; 0.$$

(a) Gilt für alle $c \in \mathbb{R}$ ein Maximumprinzip, also $f \leq 0 \Rightarrow u \leq 0$?
(b) Gilt ein solches Maximumprinzip für alle $c > 0$?

Aufgabe 4 (Biharmonische Gleichung). *(5 Punkte)*

Betrachten Sie die biharmonische Gleichung

$$-\Delta^2 u = f \text{ in } \Omega \tag{$*$}$$

für $u, f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand.

(a) Sei zunächst $f = 0$. Zeigen Sie, dass kein Maximumprinzip gilt: Es gibt $u \in C^4(\bar{\Omega})$, sodass

$$\max_{x \in \bar{\Omega}} u(x) > \max_{x \in \partial\Omega} u(x).$$

(b) Betrachten Sie ($*$) mit

$$u = g_0, \quad \nabla u \cdot \nu_\Omega = 0 \qquad \text{auf } \partial\Omega,$$

wobei ν_Ω die äußere Normale von Ω bezeichnet. Zeigen Sie, dass dieses Randwertproblem höchstens eine Lösung $u \in C^4(\bar{\Omega})$ besitzt.

<u>Tipp:</u> (a) Betrachten Sie quadratische u. (b) Verwenden Sie eine Energiemethode, also Testen der Gleichung mit u.