PROF. DR. B. SCHWEIZER
KLAAS POELSTRA, M. SC.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DORTMUND
Sommersemester 2021

Einführung in die Partiellen Differentialgleichungen

Blatt 2

Abgabe bis Montag, 26. April 2021, 14:00 Uhr

Aufgabe 1 (Ein Maximumprinzip für subharmonische Funktionen). *(5 Punkte)*

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$.

a) Sei u *strikt subharmonisch,* also $-\Delta u < 0$ in Ω. Zeigen Sie, dass u in Ω kein lokales Maximum besitzt.

b) Sei u *subharmonisch,* also $-\Delta u \leq 0$ in Ω. Weisen Sie nach, dass u sein Maximum auf dem Rand annimmt, $\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$.

Hinweis zu b): Addieren Sie die Funktion $\varepsilon \exp(x_1)$ mit $\varepsilon > 0$ und verwenden Sie a).

Aufgabe 2 (Rotation eines Vektorfeldes). *(5 Punkte)*

Die Rotation eines stetig differenzierbaren Vektorfeldes $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist definiert durch

$$\operatorname{curl} V = (\partial_{x_2} V_3 - \partial_{x_3} V_2, \partial_{x_3} V_1 - \partial_{x_1} V_3, \partial_{x_1} V_2 - \partial_{x_2} V_1) \ .$$

Gegeben sei ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ mit C^1-Rand und äußerem Normalfeld ν, sowie ein Vektorfeld $F \in C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3)$. Zeigen Sie die Relation

$$\int_{\partial\Omega} \operatorname{curl} F \cdot \nu \, dS = 0 \, .$$

Aufgabe 3 (Der Laplaceoperator in Polarkoordinaten). *(5 Punkte)*

Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$. In Polarkoordinaten $\Phi : [0, \infty) \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$, $(r, \varphi) \mapsto (r \cos\varphi, r \sin\varphi)$ betrachtet man die Funktion $\tilde{u} := u \circ \Phi$, $\tilde{u}(r, \varphi) = u(r \cos\varphi, r \sin\varphi)$. Zeigen Sie die Darstellung des Laplaceoperators

$$\Delta u(x) = \frac{\partial^2}{\partial r^2} \tilde{u}(r, \varphi) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \tilde{u}(r, \varphi) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \tilde{u}(r, \varphi) \tag{1}$$

für $x = \Phi(r, \varphi)$ und $r > 0$.

Anleitung: Durch Normierung erhält man aus den Vektoren $\partial_r \Phi$ und $\partial_\varphi \Phi$ die (orthogonalen) Richtungsvektoren e_r und e_φ. Der Gradient von u lässt sich damit schreiben als $(\nabla u)(\Phi(r, \varphi)) = \partial_r \tilde{u}(r, \varphi) e_r + r^{-1} \partial_\varphi \tilde{u}(r, \varphi) e_\varphi$. Für eine beliebige Testfunktion $\psi \in C_c^2(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ gilt daher

$$\int_{\mathbb{R}^2} \nabla u \cdot \nabla \psi = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \left\{ \partial_r \tilde{u} \cdot \partial_r \tilde{\psi} + \frac{1}{r^2} \partial_\varphi \tilde{u} \cdot \partial_\varphi \tilde{\psi} \right\} r \, d\varphi \, dr \, .$$

Durch partielle Integration erhält man links Δu und rechts den Ausdruck aus (1).

Aufgabe 4 (Zusammenhang: harmonisch $\leftrightarrow$ holomorph $\leftrightarrow$ konform). *(5 Punkte)*

Sei $D \subset \mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$ eine Funktion. Zeigen Sie:

a) f holomorph $\Rightarrow \quad \Delta u = \Delta v = 0$ in D.

b) Ist D ein achsenparalleles Rechteck und $u : D \to \mathbb{R}$ harmonisch, so gibt es eine holomorphe Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ mit Realteil u.

c) $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ heißt konform, falls gilt

$$|\nabla u|^2 = |\nabla v|^2 \neq 0\,, \quad \langle \nabla u, \nabla v \rangle = 0\,.$$

Zeigen Sie: Falls f holomorph und nicht konstant ist, so ist f konform.

d) Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ harmonisch und $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ konform. Beweisen Sie, dass dann auch $u \circ \Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ harmonisch ist.