Prof. Dr. B. Schweizer
Klaas Poelstra, M. Sc.

Technische Universität Dortmund
Sommersemester 2021

Einführung in die Partiellen Differentialgleichungen

Blatt 1

Abgabe bis Montag, 19. April 2021, 14:00 Uhr

Aufgabe 1 (Die eindimensionale Laplacegleichung). *(5 Punkte)*

Sei $\Omega = (a,b) \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Geben Sie alle Lösungen zu folgenden Gleichungen an, wobei $v, w, y, z \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen sind.

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad u(a) = v, \quad u(b) = w \tag{1}$$

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad u(a) = v, \quad \partial_x u(b) = z \tag{2}$$

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad \partial_x u(a) = y, \quad \partial_x u(b) = z \tag{3}$$

Verifizieren Sie, dass Eindeutigkeit, Maximumprinzip und Mittelwertformel gelten.

Aufgabe 2 (Zwiebelintegration). *(5 Punkte)*

Beweisen Sie für $f \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ die Formel

$$\int_{B_R(0)} f \, d\mathcal{L}^n = \int_0^R \int_{\partial B_r(0)} f \, d\mathcal{H}^{n-1} \, dr. \tag{4}$$

Anleitung: Definieren Sie $T_R : x \mapsto Rx$ und damit $(f \circ T_R)(x) = f(Rx)$, um die linke Seite als Integral über $B_1(0)$ zu schreiben. Differenzieren Sie die zu vergleichenden Ausdrücke nach R. Ein Integral der Form

$$\int_{B_1(0)} (\nabla f) \circ T_R(x) \cdot x \, dx$$

wird mit partieller Integration behandelt.

Aufgabe 3 (Eine notwendige Bedingung für Neumann-Randwerte). *(5 Punkte)*

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet mit C^1-Rand $\partial\Omega$ und äußerem Normalenfeld ν. Die Funktion $u \in C^2(\bar{\Omega})$ sei eine Lösung von

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad && \text{in } \Omega, \\ \partial_\nu u &= \psi && \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass dann notwendigerweise

$$\int_{\partial\Omega} \psi(x) \, dS(x) = -\int_\Omega f(x) \, dx.$$

Aufgabe 4 (Invarianz des Laplaceoperators). *(5 Punkte)*

Wir betrachten zwei Koordinatensysteme, gegeben durch zwei orthonormale Basen des $\mathbb{R}^n$, $(e_1, ..., e_n)$ und $(v_1, ..., v_n)$. Ein Punkt $P \in \mathbb{R}^n$ wird geschrieben als $P = \sum_{k=1}^n x_k e_k = \sum_{k=1}^n y_k v_k$, hat also den Koordinatenvektor $x = (x_1, ..., x_n)$ in der ersten Basis und den Koordinatenvektor $y = (y_1, ..., y_n) = Sx$ in der zweiten Basis, wobei $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine orthogonale Matrix ist. Berechnen Sie für $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ den Gradienten $\nabla u(P)$ in beiden Koordinatensystemen. Stellen Sie fest, dass $\Delta u(P)$ unabhängig vom Koordinatensystem ist.