technische universität dortmund

fakultät für mathematik

Prof. Dr. B. Schweizer
Dr. M. Kniely

Sommersemester 2021
08.07.2021

Strömungsmechanik

Blatt 12

Abgabe bis Donnerstag, den 15.07.2021, um 12:00

Aufgabe 1 (Konvergenz in L^p und L^q).

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $1 < p < \infty$ und $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $L^p(\Omega)$ mit $\|u_k\|_{L^p(\Omega)} \leq C$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

a) Zeigen Sie für $1 \leq q < p < \infty$:

$$u_k \rightharpoonup u \ \textit{schwach} \text{ in } L^p(\Omega) \quad \Longleftrightarrow \quad u_k \rightharpoonup u \ \textit{schwach} \text{ in } L^q(\Omega)\,.$$

Hinweis: Verwenden Sie die schwache Kompaktheit von Kugeln in $L^p(\Omega)$, das Lemma ohne Namen, und die Tatsache, dass $\int_\Omega u\,\varphi = 0$ für alle $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ die Identität $u \equiv 0$ impliziert.

b) Zeigen Sie für $1 \leq s < q < p < \infty$:

$$u_k \to u \ \textit{stark} \text{ in } L^s(\Omega) \quad \Longleftrightarrow \quad u_k \to u \ \textit{stark} \text{ in } L^q(\Omega)\,.$$

Hinweis: Überlegen Sie sich, dass ohne Einschränkung $u = 0$ gewählt werden kann. Verwenden Sie die elementare Abschätzung (24.23) aus Lemma 24.5.

c) Gilt b) auch für $q = p$? Konstruieren Sie ein Gegenbeispiel für $p = 2$ und $s = 1$ mit einer Folge der Form $u_k(x) = k$ für $x \in (0, \delta_k)$ und $u_k(x) = 0$ sonst.

Aufgabe 2 (Zeitregularität $W^{1,1}$ und $H^{1/2}$).

Sei X ein Hilbertraum und $T > 0$; wir betrachten die Räume $W_0^{1,1}(0,T;X)$ und $H_0^\alpha(0,T;X)$. Zeigen Sie:

a) Für $\alpha \in (0, 1/2)$ gilt $W_0^{1,1}(0,T;X) \hookrightarrow H_0^\alpha(0,T;X)$.

b) Es gilt $H_0^{1/2}(0,T;X) \not\subset W_0^{1,1}(0,T;X)$.

Anleitung: a) Verwenden Sie die gleichmäßige Abschätzung für $|\tau|\,\|\hat{u}(\tau)\|_X$. b) Betrachten Sie $X = \mathbb{R}$. Nutzen Sie, dass Funktionen in $W_0^{1,1}(0,T;X)$ stetig sind (vgl. Proposition 10.8). Verwenden Sie ferner die spezielle unstetige Funktion $\log\log$ *im Raum $H^1(\mathbb{R}^2)$ (vgl. Übung 3.14) und Übung 24.4.*