Blatt 8 11.1.23

Übungen zur Vorlesung

Degenerierte Partielle Differentialgleichungen

Wintersemester 2022/23

Prof. Dr. B. Schweizer

Aufgabe 1. [Eindeutigkeit im doppelt degenerierten Problem] Sei $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton wachsend. Zeigen Sie, dass es höchstens eine Lösung (u, v) von

$$\begin{aligned} \partial_t u &= \Delta v && \text{in } \Omega_T\,, \\ u &\in \alpha(v) && \text{in } \Omega_T\,. \end{aligned}$$

mit der Regularität $\partial_t u \in L^2(\Omega_T)$ gibt. Hinweis: Testen Sie mit dem Vorzeichen der Differenz.

Aufgabe 2. [Kato-Ungleichung] Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, $u \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$. Zeigen Sie für die (einwertige) Signumsfunktion $\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Ungleichung

$$\langle -\Delta u, \operatorname{sgn}(u) \rangle_{L^2(\Omega)} \geq 0\,.$$

Die Ungleichung kann als eine Monotonie von $-\Delta$ verstanden werden. Verwenden Sie für den Beweis eine Regularisierung der Signumsfunktion.

Abgabe am 18.1.23