Blatt 7 1.12.22

Übungen zur Vorlesung

Degenerierte Partielle Differentialgleichungen

Wintersemester 2022/23

Prof. Dr. B. Schweizer

Aufgabe 1. [Regularität] Wir betrachten die Situation des Existenzbeweises für $\partial_t u = \Delta v + f$, $u \in \alpha(v)$. Insbesondere sei α maximal monoton Graph, $\alpha \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit $D(\alpha) = \mathbb{R}$ und höchstens linearem Wachstum. Zusätzlich sei α gleichmäßig strikt monoton: Für eine Zahl $\gamma > 0$ gelte

$$(u_1 - u_2) \cdot (v_1 - v_2) \geq \gamma \, (v_1 - v_2)^2 \quad \forall v_j \in \mathbb{R},\, u_j \in \alpha(v_j),\, j = 1, 2\,.$$

Startwerte seien $v_0 := \beta(u_0) \in H_0^1(\Omega)$, wir betrachten zusätzlich eine rechte Seite $f \in L^2(\Omega_T)$. Zeigen Sie, dass es eine Lösung (u, v) der Gleichung mit der Regularität

$$v \in H^1(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))\,, \quad u \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))\,.$$

gibt. Anleitung: Testen Sie die diskrete Gleichung mit Differenzen $v_k^N - v_{k-1}^N$ (statt, wie im Existenzbeweis, mit v_k^N).

Abgabe am 8.12.22