Blatt 4 10.11.22

Übungen zur Vorlesung

Degenerierte Partielle Differentialgleichungen

Wintersemester 2022/23

Prof. Dr. B. Schweizer

Nachtrag vom letzten Blatt:

Aufgabe 1. [Schwache Formulierung des Stefan-Problems] Zeigen Sie mit formalen Rechnungen, dass die schwache Formulierung des Stefan-Problems (mit Energien) mit der starken Formulierung (Sprungbedingung am Rand) übereinstimmt.
Anleitung: Sei $\mathbf{1}_{\Omega_t} : \Sigma \to \mathbb{R}$ mit den Werten 0 und 1 die charakteristische Funktion der Menge Ω_t. Verwenden Sie

$$\partial_t \mathbf{1}_{\Omega_t} = -V\mathcal{H}^{n-1}|_{\partial\Omega_t}$$

mit dem $n-1$-dimensionalen Hausdorff-Maß $\mathcal{H}^{n-1}$. Vergleichen Sie mit dem singulären Anteil von Δv.

Aufgabe 2. [Differentialinklusion mit Zeitdiskretisierung] Sei $\varphi : \mathbb{R}^n \to \hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ konvex und stetig. Seien weiterhin $a_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $\varphi(a_0) < \infty$ und $T > 0$. Zeigen Sie: Die Gleichung

$$\partial_t y \in -\partial\varphi(y)$$

hat eine eindeutige schwache Lösung, also $y \in H^1(0,T;\mathbb{R}^n)$ mit

$$\int_0^T \partial_t y(y-z)\, dt \le \int_0^T (\varphi(z) - \varphi(y))\, dt\,, \quad \forall z \in L^2(0,T;\mathbb{R}^n)\,,$$
$$y(0) = a_0\,.$$

Anleitung:

1. Stellen Sie die Zeitdiskretisierung $\frac{y_{n+1}-y_n}{\Delta t} \in -\partial\varphi(y_{n+1})$ mit $y_0 := a_0$ für alle $n = 0, \cdots, N$ und $\Delta t = T/N$ auf.

2. Seien $\hat{y}^N$ die stückweise lineare und $\bar{y}^N$ die stückweise konstante Interpolation. Zeigen Sie Abschätzungen für $\hat{y}^N, \bar{y}^N \in L^\infty(0,T;\mathbb{R}^n)$, $\partial_t\hat{y}^N \in L^2(0,T;\mathbb{R}^n)$ und $\varphi(\bar{y}^N) \in L^\infty(0,T;\mathbb{R})$.

3. Für Limiten $y \in H^1(0,T;\mathbb{R}^n)$ von $\hat{y}^N$ und $\phi \in L^2(0,T;\mathbb{R})$ von $\varphi(\bar{y}^N)$: Zeigen Sie mit dem Lemma zum Vergleich von Interpolationen die Relation $\phi = \varphi(y)$ und die schwache Lösungseigenschaft.

Abgabe am 17.11.22