Blatt 3 3.11.22

Übungen zur Vorlesung

Degenerierte Partielle Differentialgleichungen

Wintersemester 2022/23

Prof. Dr. B. Schweizer

Aufgabe 1. [Produktkonvergenz impliziert starke Konvergenz] Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, $u_j \in L^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ eine beschränkte Funktionenfolge und $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend mit $\Phi(0) = 0$. Wir nehmen an, dass die schwache Konvergenz $u_j \rightharpoonup u \equiv 0$ vorliegt, zudem gelte für das Produkt

$$\int_\Omega u_j \, \Phi(u_j) \to \int_\Omega u \, \Phi(u) \, ,$$

also Konvergenz gegen 0. Zeigen Sie, dass dann die starke Konvergenz $u_j \to 0$ im Raum $L^2(\Omega)$ vorliegt.
Hinweis: Nutzen Sie $u_j \, \Phi(u_j) \geq 0$ und lesen Sie (1) wie eine Normkonvergenz.

Aufgabe 2. [Schwache Formulierung des Stefan-Problems] Zeigen Sie mit formalen Rechnungen, dass die schwache Formulierung des Stefan-Problems (mit Energien) mit der starken Formulierung (Sprungbedingung am Rand) übereinstimmt.
Anleitung: Sei $\mathbf{1}_{\Omega_t} : \Sigma \to \mathbb{R}$ mit den Werten 0 und 1 die charakteristische Funktion der Menge Ω_t. Verwenden Sie

$$\partial_t \mathbf{1}_{\Omega_t} = -V \mathcal{H}^{n-1}|_{\partial\Omega_t}$$

mit dem $n-1$-dimensionalen Hausdorff-Maß $\mathcal{H}^{n-1}$. Vergleichen Sie mit dem singulären Anteil von Δv.

Abgabe am 10.11.22