Blatt 1 20.10.22

Übungen zur Vorlesung

Degenerierte Partielle Differentialgleichungen

Wintersemester 2022/23

Prof. Dr. B. Schweizer

Aufgabe 1. [Galerkin Verfahren] Wir betrachten die doppelt nichtlineare Gleichung

$$\partial_t u - \nabla \cdot (a(u)\nabla u) = f(u)\,.$$

Die rechte Seite sei dabei gegeben durch eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit höchstens linearem Wachstum, es gelte also eine Abschätzung $f(\xi)\xi \leq C_1|\xi| + C_2$ für alle $\xi \in \mathbb{R}$. Die anderen Daten seien wie im Existenzsatz der Vorlesung. Überprüfen Sie, ob das Galerkin-Verfahren auch bei dieser Gleichung verwendet werden kann, um die Existenz einer Lösung nachzuweisen.

Aufgabe 2. [Eindeutigkeit im nichtlinearen Ganzraumproblem] Seien $u_1, u_2 \in C_b^0([0,T] \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ Lösungen des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \partial_t u(x,t) - \Delta u(x,t) &= f(u(x,t)) \quad \text{für } (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,T)\,, \\ u(x,0) &= \varphi(x), \qquad\quad \text{für } x \in \mathbb{R}^n\,. \end{aligned}$$

Dabei sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $\varphi \in C_b^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass auf $\mathbb{R}^n \times [0,T]$ die Eindeutigkeitsaussage $u_1 = u_2$ gilt.
Anleitung: Stellen Sie die Gleichungen für $w = u_1 - u_2$ auf und schreiben Sie w mit Hilfe einer Darstellungsformel als Integral. Verwenden Sie ein Gronwallsches Lemma für $y(t) := \|w(t,.)\|_{C^0(\mathbb{R}^n)}$.

Abgabe am 27.10.22