Prof. Dr. B. Schweizer
Klaas Poelstra, M. Sc.

Technische Universität Dortmund
Wintersemester 2020/21

Analysis 3

Blatt 9

Abgabe bis Montag, 1. Februar 2021, 14:00 Uhr

Aufgabe 1 (Fourier-Koeffizienten berechnen). *(2 Punkte)*

Für eine Funktion $f \in L_{2\pi} := L^2((0,2\pi))$ sind die Fourier-Koeffizienten $c_k \in \mathbb{C}$ definiert durch

$$c_k := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} \,\mathrm{d}x \,, \qquad k \in \mathbb{Z} \,.$$

Berechnen Sie die Fourier-Koeffizienten für folgende Funktionen:

(i) $f(x) := x$.

(ii) $f(x) := |\sin(x)|$.

Aufgabe 2 (Orthonormalsystem). *(2 Punkte)*

(i) Zeigen Sie, dass die Funktionen

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(kx) \quad (k = 1,2,3,\dots) \,, \qquad x \mapsto \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(kx) \quad (k = 0,1,2,\dots)$$

ein Orthonormalsystem in $L^2_{2\pi}$ bilden.

(ii) Zeigen Sie, dass dieses Orthonormalsystem vollständig ist.
Hierzu dürfen Sie verwenden, dass die komplexen Basisfunktionen $\Phi_k(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$, $k \in \mathbb{Z}$, ein vollständiges Orthonormalsystem bilden.

Aufgabe 3 (Nur Sinusfunktionen). *(4 Punkte)*

Wir betrachten die Funktionen $\phi_k(x) := \sqrt{\frac{1}{\pi}} \sin(kx)$, $k \in \mathbb{N}_*$, und dazu

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{F}} : L^2_{2\pi} \to \ell^2(\mathbb{N}_*) \,, \qquad & f \mapsto (\langle f, \phi_k \rangle)_{k \in \mathbb{N}_*} \,, \\ \tilde{\mathcal{F}}^* : \ell^2(\mathbb{N}_*) \to L^2_{2\pi} \,, \qquad & (c_k)_{k \in \mathbb{N}_*} \mapsto \sum_{k \in \mathbb{N}_*} c_k \phi_k \,. \end{aligned}$$

(i) Bestimmen Sie $Q := \tilde{\mathcal{F}} \circ \tilde{\mathcal{F}}^*$ und zeigen Sie, dass $P := \tilde{\mathcal{F}}^* \circ \tilde{\mathcal{F}}$ eine Projektion ist, d. h, dass $P \circ P = P$ gilt.

(ii) Geben sie eine Formel für P an.

Aufgabe 4 (Fourier-Reihen Differenzierbarkeit). *(3 Punkte)*

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine Funktion mit $f(x + 2\pi) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Wir nehmen an, dass $f|_{(0,2\pi)} \in L_{2\pi}$. Es seien $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ die Fourier-Koeffizienten von $f|_{(0,2\pi)}$. Zeigen Sie:

(i) Wenn f eine n-mal stetig differenzierbare Funktion ist, so gilt

$$c_k = O\left(\frac{1}{|k|^n})\right) \quad \text{für } |k| \to \infty\,.$$

(ii) Falls

$$c_k = O\left(\frac{1}{|k|^{n+2}})\right) \quad \text{für } |k| \to \infty\,,$$

so ist f eine n-mal stetig differenzierbare Funktion und die Fourier-Reihe konvergiert gleichmäßig gegen f.

(iii) Zeigen sie mit einem Beispiel, dass in (i) die Umkehrung nicht gilt.

Tipp: Sie haben die Koeffizienten für ein passendes Beispiel in einer anderen Aufgabe bereits berechnet.