Prof. Dr. B. Schweizer
Klaas Poelstra, M. Sc.

Technische Universität Dortmund
Wintersemester 2020/21

Analysis 3

Blatt 8

Abgabe bis Montag, 25. Januar 2021, 14:00 Uhr

Aufgabe 1 (Skalarprodukträume). *(2 Punkte)*

Es sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und X ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Eine Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{K}$$

heißt *Sesquilinearform*, falls gilt:

(A) $\lambda \langle x, y \rangle = \langle \lambda x, y \rangle = \langle x, \overline{\lambda} y \rangle$ für alle $x, y \in X$ und $\lambda \in \mathbb{K}$.

(B) $\langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle = \langle x + x', y \rangle$ für alle $x, y, x' \in X$.

Eine Sesquilinearform heißt symmetrisch, falls

(C) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ für alle $x, y \in X$,

und *positiv definit*, falls

(D) für alle $x \in X$ gilt: $\langle x, x \rangle \geq 0$ und $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Eine positiv definite symmetrische Sesquilinearform heißt *Skalarprodukt*.

(i) Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ messbar. Zeigen Sie, dass durch

$$\langle u, v \rangle := \int_\Omega u(x) \overline{v}(x) \,\mathrm{d}x$$

ein Skalarprodukt auf $L^2(\Omega, \mathbb{K})$ definiert wird.

(ii) Zeigen Sie für $u, v \in L^2(\Omega, \mathbb{K})$ die *Parallelogrammidentität*:

$$\|u + v\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u - v\|^2_{L^2(\Omega)} = 2\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\|v\|^2_{L^2(\Omega)} .$$

Aufgabe 2 (L^p-Norm für $p \to \infty$). *(2 Punkte)*

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit $0 < |\Omega| < \infty$. Für messbare Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}$ und $1 \leq p < \infty$ sei

$$\Phi_p(f) := \left(\frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega |f(x)|^p \,\mathrm{d}x \right)^{1/p} = |\Omega|^{-1/p} \|f\|_{L^p} \in [0, \infty] .$$

Ferner sei $\|f\|_\infty := \inf\{C \in \mathbb{R} \mid |f(x)| \leq C$ für fast alle $x \in \Omega\}$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $p \mapsto \Phi_p(f)$ monoton wachsend ist und dass gilt:

$$\|f\|_\infty = \lim_{p \to \infty} \Phi_p(f) = \lim_{p \to \infty} \|f\|_{L^p} .$$

Aufgabe 3 (Spezielle Funktionen in L^p). *(3 Punkte)*

Wir betrachten für $\alpha \in \mathbb{R}$ die Funtion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x) := \|x\|^\alpha$. Ferner seien $1 \leq p < q < \infty$.

(i) Untersuchen Sie, für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ die Funktion f in $L^p(\Omega)$ liegt, wenn $\Omega := B_1(0) \setminus \{0\}$.

(ii) Untersuchen Sie, für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ die Funktion f in $L^p(\Omega)$ liegt, wenn $\Omega := \mathbb{R}^3 \setminus B_1(0)$.

(iii) Untersuchen Sie, für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ die Funktion f in $L^p(\Omega)$, aber nicht in $L^q(\Omega)$ liegt, wenn $\Omega := B_1(0) \setminus \{0\}$.

Aufgabe 4 (Konvergenz in L^p). *(3 Punkte)*

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ messbar mit $|\Omega| > 0$ und $1 \leq p < \infty$. Zeigen Sie:

(i) Zu jeder Cauchy-Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $L^p(\Omega)$ gibt es eine Teilfolge $(f_{k_l})_{l\in\mathbb{N}}$ und ein $f \in L^p(\Omega)$, sodass $f_{k_l} \to f$ punktweise fast überall für $l \to \infty$.

(ii) Auf die Auswahl einer Teilfolge in (a) kann i. A. nicht verzichtet werden.

(iii) Es gibt beschränkte Folgen $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $L^p(\Omega)$, die keine punktweise fast übarall konvergente Teilfolge besitzen.