Prof. Dr. B. Schweizer
Klaas Poelstra, M. Sc.

Technische Universität Dortmund
Wintersemester 2020/21

Analysis 3

Blatt 7

Abgabe bis Montag, 18. Januar 2021, 14:00 Uhr

Aufgabe 1 (Teilung der Eins). *(2 Punkte)*

Für jedes $\varepsilon > 0$ sei $(\alpha^\varepsilon_{p\varepsilon})_{p\in\mathbb{Z}^n}$ eine Teilung der Eins auf $\mathbb{R}^n$, d. h. $\alpha^\varepsilon_{p\varepsilon} : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ seien Funktionen mit $\sum_{p\in\mathbb{Z}^n} \alpha^\varepsilon_{p\varepsilon}(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Zusätzlich nehmen wir an, dass die $\alpha^\varepsilon_{p\varepsilon}$ unendlich oft differenzierbar sind und außerhalb von $\{x \in \mathbb{R}^n \mid |x_i - p_i\varepsilon| \le \varepsilon \text{ für } 1 \le i \le n\}$ verschwinden.

Zu einer vorgegebenen Funktion $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ definieren wir

$$f_\varepsilon := \sum_{p\in\mathbb{Z}^n} f(p\varepsilon)\alpha^\varepsilon_{p\varepsilon}\,.$$

Zeigen Sie, dass die Funktionen $f_\varepsilon \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ für $\varepsilon \to 0$ gleichmäßig gegen f konvergieren.

Aufgabe 2 (Rotationssymmetrie). *(2 Punkte)*

Es seien f, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, für die gilt:

$$\|x\| = \|y\| \quad\Longrightarrow\quad f(x) = f(y) \text{ und } g(x) = g(y)\,.$$

Solche Funktionen heißen rotationssymmetrisch.

Für ein vorgegebenes $R > 0$ und die Kugel $B = B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$ definieren wird die Funktion $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch

$$F(x) := \int_B f(y)g(y-x)\,\mathrm{d}y\,.$$

Zeigen Sie, dass F ebenfalls rotationssymmetrisch ist.

Aufgabe 3 (Eine Positivitätseigenschaft). *(2 Punkte)*

Es sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine messbare Funktion, zu der es eine messbare Menge $M \subset \Omega$ mit $|M| > 0$ und $f(x) > 0$ für alle $x \in M$ gibt. Zeigen Sie, dass es ein $\varepsilon > 0$ und eine messbare Menge M_ε mit $|M_\varepsilon| > 0$ gibt, sodass $f(x) \ge \varepsilon$ für alle $x \in M_\varepsilon$.

Aufgabe 4 (Laplace in Kugelkoordinaten). *(2 Punkte)*

Leiten Sie eine Formel für den Laplace-Operator in Kurgelkoordinaten her (in $\mathbb{R}^3$).

Aufgabe 5 (Skalarprodukträume). *(2 Punkte)*

Es sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und X ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Eine Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{K}$$

heißt *Sesquilinearform*, falls gilt:

(A) $\lambda \langle x, y \rangle = \langle \lambda x, y \rangle = \langle x, \overline{\lambda} y \rangle$ für alle $x, y \in X$ und $\lambda \in \mathbb{K}$.

(B) $\langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle = \langle x + x', y \rangle$ für alle $x, y, x' \in X$.

Eine Sesquilinearform heißt symmetrisch, falls

(C) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ für alle $x, y \in X$,

und *positiv definit*, falls

(D) für alle $x \in X$ gilt: $\langle x, x \rangle \geq 0$ und $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Eine positiv definite symmetrische Sesquilinearform heißt *Skalarprodukt*.

(i) Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ messbar. Zeigen Sie, dass durch

$$\langle u, v \rangle := \int_\Omega u(x) \overline{v}(x) \, \mathrm{d}x$$

ein Skalarprodukt auf $L^2(\Omega, \mathbb{K})$ definiert wird.

(ii) Zeigen Sie für $u, v \in L^2(\Omega, \mathbb{K})$ die *Parallelogrammidentität*:

$$\|u + v\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u - v\|^2_{L^2(\Omega)} = 2\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\|v\|^2_{L^2(\Omega)} .$$