PROF. DR. B. SCHWEIZER
KLAAS POELSTRA, M. SC.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DORTMUND
Wintersemester 2020/21

Analysis 3

Blatt 6

Abgabe bis Montag, 4. Januar 2021, 14:00 Uhr

Aufgabe 1 (Rotationskörper). *(3 Punkte)*

Gegeben sei eine messbare Funktion $h : (a,b) \to (0,\infty)$ und dazu der *Rotationskörper*

$$V := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid |(x,y)| \leq h(z)\}\,.$$

(i) Skizzieren Sie den Graphen von h und die Menge V für

$$h(z) := z - \frac{1}{2}\lfloor z \rfloor - \lfloor z/4 \rfloor (z - 5/2)\,, \qquad z \in (a,b) := (0,5)\,.$$

Sie dürfen dazu auch passende Farben verwenden.

Hinweis. Mit $\lfloor x \rfloor$ wird die größte ganze Zahl bezeichnet, die kleiner oder gleich x ist.

(ii) Geben Sie mithilfe des Prinzips von Calavieri eine Formel für das Volumen von V an.

(iii) Leiten Sie dieselbe Formel nochmals her, indem Sie die Transformation

$$\Phi : \Sigma \times (0, 2\pi) \to V\,, \qquad (s,\phi,z) \mapsto (s\cos\phi, s\sin\phi, z)$$

mit $\Sigma := \{(s,z) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < s < h(z)\,,\ z \in (a,b)\}$ verwenden.

Aufgabe 2 (Konvergenzsätze). *(2 Punkte)*

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und offen, und (u_k) eine Folge messbarer Funktionen $u_k : \Omega \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass $u_k(x) \to u(x)$ für fast alle $x \in \Omega$. Weiterhin sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige und beschränkte Funktion. Zeigen Sie, dass $f(u_k) \to f(u)$ in $L^1(\Omega)$, das heißt

$$\int_\Omega |f(u_k(x)) - f(u(x))|\,\mathrm{d}x \to 0 \quad (\text{für } k \to \infty).$$

Aufgabe 3 (Volumenberechnung). *(2 Punkte)*

Es sei $R > 0$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ die Menge

$$\Omega := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\,,\ x^2 + y^2 \leq z^2\,,\ z \geq 0\}\,.$$

Skizzieren Sie die Menge Ω und berechnen Sie das Volument mithilfe der *Kugelkoordinaten* $(x,y,z) = (r\cos\phi\sin\theta, r\sin\phi\sin\theta, r\cos\theta)$.

Aufgabe 4 (Transformationsformel). *(3 Punkte)*

(i) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\Phi : (0,\infty) \times (0,1) \to (0,\infty) \times (0,\infty)\,, \qquad \Phi(s,t) \coloneqq (s(1-t), st)$$

bijektiv ist. Wie lautet die Umkehrabbildung? Berechnen Sie die Funktionalmatrix und Funktionaldeterminante von Φ.

(ii) Berechnen Sie mithilfe der Transformation Φ und des Satzes von Fubini das Integral

$$\int_{(0,\infty)\times(0,\infty)} e^{-x-y} x^{-1/2} y^{-1/2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$