PROF. DR. B. SCHWEIZER
KLAAS POELSTRA, M. SC.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DORTMUND
Wintersemester 2020/21

Analysis 3

Blatt 5

Abgabe bis Montag, 14. Dezember 2020, 14:00 Uhr

Aufgabe 1 (Rechnen mit Fubini). *(3 Punkte)*

(i) Wir betrachten die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,, \qquad (x,y) \mapsto \frac{xy}{(x^2+1)(y^2+y+1)}\,.$$

Für welche Quadrate $Q \coloneqq [a, a+1] \times [b, b+1]$ der Kantenlänge 1 wird das Integral $\int_Q f \,\mathrm{d}\lambda^2$ maximal? Welchen Wert besitzt es?

(ii) Es sei $G \coloneqq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (1,3)\,,\ 0 < y < x^2\}$. Berechnen Sie das Integral $\int_G f \,\mathrm{d}\lambda^2$ für die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,, \qquad (x,y) \mapsto x^2 + xy - y^3\,.$$

Aufgabe 2 (Prinzip von Cavalieri). *(2 Punkte)*

Es seien a, b, $c > 0$. Wir betrachten die Ellipse E_1 und den Ellipsoiden E_2, definiert durch

$$E_1 \coloneqq \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \le 1 \right\}, \quad E_2 \coloneqq \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \le 1 \right\}.$$

Berechnen Sie den Flächeninhalt von E_1 und das Volumen von E_2.

Aufgabe 3 (Ein Gegenbeispiel). *(2 Punkte)*

Es sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) \coloneqq \begin{cases} y^{-2} & \text{falls } 0 < x < y \le 1 \\ -x^{-2} & \text{falls } 0 < y < x \le 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ und $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,.$

Aufgabe 4 (Konvergenzsätze). *(3 Punkte)*

Überprüfen Sie jeweils, welche Voraussetzungen der Sätze von Beppo Levi und Lebesgue und des Lemmas von Fatou erfüllt werden und welche nicht. Geben Sie jeweils den punktweisen Limes der Funktionen $f_k : \Omega \to \mathbb{R}$ an.

(i) Sei $\Omega \coloneqq [0,1]$ und r_j eine Abzählung von $\Omega \cap \mathbb{Q}$. Weiter sei $f_k(r_j) = 1$ für $1 \le j \le k$ und $f_k(x) = 0$ für die restlichen $x \in \Omega$.

(ii) Sei $\Omega \coloneqq \mathbb{R}$ und $f_k(x) \coloneqq \frac{1}{k}$ für $-k \le x \le k$ sowie $f_k(x) = 0$ für die restlichen $x \in \Omega$.

(iii) Sei $\Omega \coloneqq [0,1]$ und $f_k(x) \coloneqq k$ für $0 < x < \frac{1}{k}$ sowie $f_k(x) = 0$ für die restlichen $x \in \Omega$.