Prof. Dr. B. Schweizer
Klaas Poelstra, M. Sc.

Technische Universität Dortmund
Wintersemester 2020/21

Analysis 3

Blatt 4

Abgabe bis Montag, 7. Dezember 2020, 14:00 Uhr

Aufgabe 1 (Eigenschaften von L^1-Funktionen). *(3 Punkte)*

(i) Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ messbar und $f \in L^1(\Omega)$. Zeigen Sie:

  (a) Für eine beliebige Folge $(\Omega_i)_{i\in\mathbb{N}}$ messbarer Teilmengen von Ω mit $\lim_{i\to\infty} |\Omega_i| = 0$ gilt $\lim_{i\to\infty} \int_{\Omega_i} |f| = 0$.

  (b) Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es eine messbare Menge $\Omega_0 \subset \Omega$ mit $|\Omega_0| < \infty$ und $\int_{\Omega\setminus\Omega_0} |f| < \varepsilon$.

(ii) Es gelte $\Omega = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \Omega_i$ für eine Folge $(\Omega_i)_{i\in\mathbb{N}}$ paarweise disjunkter messbarer Mengen. Folgern Sie aus (i), dass

$$\int_\Omega f = \sum_{i\in\mathbb{N}} \int_{\Omega_i} f\,.$$

Aufgabe 2 (Mittelwerte). *(2 Punkte)*

Es sei $(\Omega_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ein Folge messbarer Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ mit $\lambda^n(\Omega_j) \in (0,\infty)$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Wir nehmen an, dass diese Mengen sich auf einen Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ zusammenziehen, d. h. für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $J \in \mathbb{N}$, sodass $\Omega_j \subset B_\varepsilon(x_0)$ für alle $j \geq J$. Weiterhin sei $f \in L^1(\Omega_1)$ stetig in x_0. Zeigen Sie:

$$\lim_{j\to\infty} \frac{1}{\lambda^n(\Omega_j)} \int_{\Omega_j} f(x)\,\mathrm{d}x = f(x_0)\,.$$

Aufgabe 3 (Anwendung des Satzes von Beppo-Levi). *(2 Punkte)*

Sei $\Omega \coloneqq (0,1)$ und $f(x) \coloneqq \sqrt{x}^{-1}$. Zeigen Sie mithilfe des Satzes von Beppo-Levi, dass $f \in L^1(\Omega)$ und $\int_\Omega f = 2$.

Aufgabe 4 (Beispiele). *(3 Punkte)*

Es sei Ω eine messbare Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Beweisen Sie folgende Aussagen:

(i) Sei f_k eine Cauchy-Folge in $L^1(\Omega)$, die punktweise fast überall gegen eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ konvergiert. Dann gilt $f_k \to f$ in $L^1(\Omega)$.

(ii) Sei $f_k : \Omega \to \mathbb{R}$ eine monoton wachsende Folge mit $f_k \to f$ in $L^1(\Omega)$. Dann konvergiert die gesamte Folge punktweise fast überall gegen f.

(iii) Geben Sie für $\Omega = \mathbb{R}$ Folgen stetiger Funktionen $f_k, g_k : \Omega \to \mathbb{R}$ an mit

  (a) $f_k \to 0$ in $L^1(\Omega)$, aber nicht in $C^0(\Omega)$,

  (b) $g_k \to 0$ in $C^0(\Omega)$, aber nicht in $L^1(\Omega)$.