Prof. Dr. B. Schweizer
Klaas Poelstra, M. Sc.

Technische Universität Dortmund
Wintersemester 2020/21

Analysis 3

Blatt 3

Abgabe bis Montag, 30. November 2020, 14:00 Uhr

Aufgabe 1 (Lemma von Fatou). *(2 Punkte)*

Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f_k : X \to [0, \infty]$ eine Folge messbarer Funktionen. Zeigen Sie:

$$\int_X (\liminf_{k\to\infty} f_k) \, \mathrm{d}\mu \le \liminf_{k\to\infty} \int_X f_k \, \mathrm{d}\mu \,.$$

Aufgabe 2 (Riemann-integrierbare Funktionen). *(2 Punkte)*

Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Zeigen Sie: f ist Lebesgue-messbar und das Riemann-Integral stimmt mit dem Lebesgue-Integral überein,

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = \int_{[a,b]} f(x) \, \mathrm{d}\lambda(x) \,.$$

Aufgabe 3 (Kritische Werte). *(2 Punkte)*

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $A := \{x \in \mathbb{R} \mid f'(x) = 0\}$. Zeigen Sie, dass $f(A) \subset \mathbb{R}$ eine Lebesgue-Nullmenge ist.

Hinweis: Jede offene Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist eine disjunkte Vereinigung abzählbar vieler offener Intervalle. Untersuchen Sie die Mengen

$$A_n(\varepsilon) := \{x \in (-n, n) \mid |f'(x)| < \varepsilon 2^{-n}\}$$

und wenden Sie den Mittelwertsatz der Differentialrechnung an.

Aufgabe 4 (Absolutstetigkeit). *(1+1+2=4 Punkte)*

Es sei $(X, \mathcal{A})$ ein Messraum und μ, ν seien zwei Maße auf X. Das Maß ν heißt *absolut stetig* bezüglich μ, in Zeichen $\nu \ll \mu$, wenn jede μ-Nullmenge auch eine ν-Nullmenge ist.

(i) Wir betrachten den Messraum der Borel-messbaren Mengen im $\mathbb{R}^n$ und darauf das Lebesgue-Maß λ^n sowie das Dirac-Maß δ_0. Zeigen Sie, dass weder $\lambda^n \ll \delta_0$ noch $\delta_0 \ll \lambda^n$ gilt.

(ii) Es gilt der Satz von Radon-Nikodým:

> Es sei $(X, \mathcal{A})$ ein Messraum und μ, ν seien zwei Maße auf X. Das Maß μ sei σ-endlich, d. h. es gelte $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ für Mengen $A_n \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A_n) < \infty$. Dann gilt $\nu \ll \mu$ genau dann, wenn es eine messbare Funktion $f : X \to [0, \infty)$ gibt mit $\nu = f\mu$.

Zeigen Sie eine der zwei Implikationen dieses Satzes.

(iii) Zeigen Sie: Falls $\nu(X) < \infty$, so gilt $\nu \ll \mu$ genau dann, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall A \in \mathcal{A} : \; \mu(A) < \delta \implies \nu(A) < \varepsilon \,.$$