Prof. Dr. B. Schweizer
Klaas Poelstra, M. Sc.

Technische Universität Dortmund
Wintersemester 2020/21

Analysis 3

Blatt 2

Abgabe bis Montag, 23. November 2020, 14:00 Uhr

Aufgabe 1 (Approximation des Lebesuge-Maßes). *(2 Punkte)*

(i) Aus Satz 4.3 wissen wir, dass für messbare Mengen $A \subset \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\lambda^n(A) = \inf\{\lambda^n(U) \mid U \supset A \text{ offen}\} = \sup\{\lambda^n(U) \mid U \subset A \text{ abgeschlossen}\}\,.$$

Zeigen Sie, dass diese Aussage nicht wahr ist, wenn man die Begriffe „offen“ und „abgeschlossen“ vertauscht.

(ii) Untersuchen Sie, ob für messbare Mengen $A \subset \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\lambda^n(A) = \sup\{\lambda^n(U) \mid U \subset A \text{ kompakt}\}\,.$$

Aufgabe 2 (Maße und Grenzwerte). *(2 Punkte)*

Es sei μ ein Maß. Zeigen Sie:

(i) Für eine Folge (A_k) messbarer Mengen mit $A_{k+1} \supset A_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mu(A) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k)\,, \qquad A := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\,.$$

(ii) Für eine Folge (A_k) messbarer Mengen mit $\mu(A_1) < \infty$ und $A_{k+1} \subset A_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mu(A) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k)\,, \qquad A := \bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k\,.$$

Zusatz: Ohne die Bedingung $\mu(A_1) < \infty$ gilt die Aussage nicht.

Aufgabe 3 (Ein Zufallsexperiment). *(3 Punkte)*

Wir untersuchen folgendes Zufallsexperiment: Zunächst wird eine faire Münze geworfen. Wenn das Ergebnis „Zahl“ ist, wird der Variablen ω der Wert $\frac{1}{4}$ zugeordnet und das Experiment ist beendet. Zeigt die Münze „Kopf“, so wird eine Zufallszahl in $[0,1]$ bestimmt, wobei wir von einer Gleichverteiltung ausgehen (alle Zahlen sind „gleich wahrscheinlich“). Dann wird ω gleich dieser Zufallszahl gesetzt.

(i) Warum gibt es keine „Wahrscheinlichkeitsdichte“ $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, sodass die Wahrscheinlichkeit für $\omega \in (a,b)$ mit $0 \le a \le b \le 1$ gerade $\int_a^b f(\omega)\,\mathrm{d}\omega$ ist?

(ii) Es sei $\mathcal{A} := \{(a,b) \mid 0 \le a \le b \le 1\}$. Finden Sie eine Abbildung $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, sodass die Wahrscheinlichkeit für $\omega \in (a,b)$ gerade $\mu((a,b))$ ist.

Aufgabe 4 (Die Cantor-Funktion). *(3 Punkte)*

Die *Cantor-Menge* $C \subset \mathbb{R}$ ist definiert als $C := \bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} C_n$, wobei

$$C_0 := [0,1]\,, \qquad C_n := \frac{1}{3}\left(C_{n-1} \cup (2 + C_{n-1})\right)\,, \qquad n \in \mathbb{N}\,.$$

Dazu definieren wir nun die Funktionen $F_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ durch

$$F_n(x) := \left(\frac{3}{2}\right)^n \int_0^x \chi_{C_n}(y)\,\mathrm{d}y\,.$$

Dabei bezeichnet χ_{C_n} die *charakteristische Funktion* der Menge C_n, d. h.

$$\chi_{C_n(x)} = \begin{cases} 1\,, & \text{falls } x \in C_n\,, \\ 0\,, & \text{falls } x \notin C_n\,. \end{cases}$$

(i) Skizzieren sie jeweils einen Graphen zu F_0, F_1 und F_2.

(ii) Zeigen Sie, dass die Grenzfunktion $F(x) := \lim_{n\to\infty} F(x)$ existiert und dass F stetig und monoton wachsend ist. Die Funktion F heißt *Cantor-Funktion*.

(iii) Zeigen Sie, dass $F(C) = [0,1]$ und $F'(x) = 0$ für alle $[0,1] \setminus C$.

Anmerkung: In der vergangenen Präsenzübung haben wir gezeigt, dass die *Cantor-Menge* C eine Nullmenge ist. Sie zeigen mit der obigen Aufgabe also, dass die Nullmenge C stetig und surjektiv auf $[0,1]$ abgebildet werden kann.