Prof. Dr. B. Schweizer
Klaas Poelstra, M. Sc.

Technische Universität Dortmund
Wintersemester 2020/21

Analysis 2

Blatt 1

Abgabe bis Montag, 16. November 2020, 14:00 Uhr

Aufgabe 1 (Ringe, Algebren, σ-Algebren). *(3 Punkte)*

Es sei X eine beliebige Menge. Welche der Mengensysteme $\mathcal{A}_i$ sind ein Ring / eine Algebra / ene σ-Algebra?

(i) $\mathcal{A}_1 \coloneqq \{M \subset X \mid M \text{ ist endlich}\}$

(ii) $\mathcal{A}_2 \coloneqq \{M \subset X \mid X \setminus M \text{ ist endlich}\}$

(iii) $\mathcal{A}_3 \coloneqq \{M \subset X \mid M \text{ ist abzählbar}\}$

Aufgabe 2 (Urbilder von σ-Algebren). *(4 Punkte)*

Es sei $f : X \to Y$ eine Abbildung zwischen Mengen X und Y. Weiter sei $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(Y)$ eine σ-Algebra und

$$\mathcal{A} \coloneqq \{f^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}\}$$

Zeigen Sie:

(i) Auch $\mathcal{A}$ ist eine σ-Algebra.

(ii) Angenommen, die σ-Algebra $\mathcal{B}$ wird von einer Familie $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{P}(Y)$ erzeugt. Dann wird die σ-Algebra $\mathcal{A}$ von
$$\mathcal{A}_0 \coloneqq \{f^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}_0\}$$
erzeugt.

Aufgabe 3 (Das Zählmaß). *(3 Punkte)*

Es sei X eine Menge und $\mathcal{A} \coloneqq \mathcal{P}(X)$ die Potenzmenge von X. Zu $A \in \mathcal{A}$ definieren wir

$$\mu(A) \coloneqq \begin{cases} \text{Anzahl der Elemente von } A, \text{ falls } A \text{ endlich ist,} \\ \infty, \text{ falls } A \text{ unendlich viele Elemente besitzt.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum ist.