PROF. DR. B. SCHWEIZER
KLAAS POELSTRA, M. SC.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DORTMUND
Wintersemester 2020/21

Analysis 3

Blatt 10

Abgabe bis Montag, 8. Februar 2021, 14:00 Uhr

Aufgabe 1 (Schwingende Saite). *(3 Punkte)*

Eine Saite der Länge π sei in den Punkten $x = 0$ und $x = \pi$ fest eingespannt. Die Saite wird beispielsweise durch Zupfen in Bewegung versetzt und hat im Punkt $x \in [0, \pi]$ zur Zeit $t \geq 0$ eine gewisse Auslenkung $u(x, t)$ sowie eine Auslenkungsgeschwindigkeit $\partial_t u(x, t)$. Das Bewegungsgesetz der Saite ist die *partielle Differentialgleichung*

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\,, \qquad x \in (0, \pi)\,,\ t \in (0, \infty)\,.$$

Hierbei ist $c > 0$ eine gegebene Konstante. Dazu haben wir die Randbedingungen

$$u(0,t) = u(\pi, t) = 0\,, \qquad t \in [0, \infty)\,,$$

und die Anfangsbedingungen

$$u(x,0) = u_0(x)\,,\ \partial_t u(x,0) = u_1(x)\,, \qquad x \in [0, \pi]\,.$$

Hierbei sind $u_0 : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ und $u_1 : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ zwei gegebene Funktionen mit $u_0(0) = u_1(0) = 0$, sowie $u_0(\pi) = u_1(\pi) = 0$. Wir suchen eine Lösung $u : [0, \pi] \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ in Form einer Fourier-Reihe

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(t) \sin(kx)$$

mit zeitabhängigen Koeffizienten $b_k : [0, \infty) \to \mathbb{R}$.

(i) Bestimmen Sie eine gewöhnliche Differentialgleichung für die Koeffizienten $b_k : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ sowie deren allgemeine Lösung.

(ii) Finden Sie zu gegebenen Anfangsdaten $u_j(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_{j,k} \sin(kx)\,,\ j \in \{0, 1\}$, einen Kandidaten für die Lösung u.

(iii) Für die Fourier-Koeffizienten der Anfangsdaten gelte

$$\sum_{k=1}^{\infty} |k c_{j,k}|^2 < \infty\,, \qquad j \in \{0, 1\}\,.$$

Zeigen Sie, dass die Funktion u aus (ii) die Anfangsbedingungen erfüllt, d. h. dass $\|u(t) - u_0\|_{L^2} \to 0$ und $\|\partial_t u(t) - u_1\|_{L^2} \to 0$ für $t \to 0$. Zeigen Sie dazu, dass die Reihen $\sum_k |b_k(t) - c_{0,k}|^2$ und $\sum_k |b_k'(t) - c_{1,k}|^2$ gleichmäßig beschränkt in t sind.

Aufgabe 2 (Integration mit einem Einheitsnormalen-Vektorfeld). *(3 Punkte)*

Sei M eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$, die durch eine Karte $\phi : U \to M$ parametrisiert ist, $U \subset \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass

$$\int_M f(x) \cdot \nu(x) \, \mathrm{d}x = \pm \int_U f(\phi(y)) \cdot (\partial_1 \phi(y) \times \partial_2 \phi(y)) \, \mathrm{d}y$$

für jede integrierbare Funktion $f : M \to \mathbb{R}^3$. Hierbei ist

$$\nu(x) := \frac{\partial_1 \phi(y) \times \partial_2 \phi(y)}{|\partial_1 \phi(y) \times \partial_2 \phi(y)|}, \qquad y = \phi^{-1}(x), \quad x \in M,$$

ein Einheitsnormalen-Vektorfeld zu M.

Hinweis: Zeigen Sie dazu für eine Matrix $F \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ mit den Spalten $f_1, f_2 \in \mathbb{R}^3$, dass

$$\det(F^T F) = |f_1 \times f_2|^2 .$$

Aufgabe 3 (Flächeninhalt des Torus). *(2 Punkte)*

Für reelle Zahlen $0 < r < R$ sei der Torus $\mathbb{T}_2$ definiert durch

$$\mathbb{T}_2 := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (R - \sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2 = r^2 \right\} .$$

Berechnen Sie das zweidimensionale Volumen von $\mathbb{T}_2$.

Aufgabe 4 (Flächeninhalt eines Rotations-Ellipsoids). *(2 Punkte)*

Es seien $a, b, c > 0$. Berechnen Sie die Fläche des Ellipsoids

$$M := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1 \right\}$$

für den Fall $a = b$.