# Analysis 3

TU Dortmund, Wintersemester 2020/21

**Kurzskript**

Prof. Dr. Ben Schweizer

Vollständige Version, erstellt zum Semesterende am 12.2.2021

## Inhaltsverzeichnis

**A. Konstruktion des Lebesgue-Maßes** **2**
1. Mengensysteme . . . 2
2. Inhalte, Prämaße und Maße . . . 3
3. Prämaß-Fortsetzung . . . 4
4. Das Lebesgue-Maß . . . 4

**B. Das Lebesgue-Integral** **5**
5. Integration messbarer Funktionen . . . 5
6. Konvergenzsätze . . . 6
7. Cavalieri und Fubini . . . 7
8. Transformationsformel . . . 10
9. Anwendungen der Integralsätze . . . 10
10. Die $L^p$-Räume . . . 12

**C. Arbeiten mit Integralen** **14**
11. Fourier-Reihen . . . 14
12. Integration über Untermannigfaltigkeiten . . . 18
13. Der Gaußsche Integralsatz . . . 19

# A. Konstruktion des Lebesgue-Maßes

## Das Maßproblem

Rechtecke, Dreiecke, Kreise

Maßproblem: Gesucht ist eine normierte, translationsinvariante und $\sigma$-additive Abbildung $\mathscr{P}(\mathbb{R}^n) \to \bar{\mathbb{R}}$.

Satz von Vitali (1905): Das Maßproblem ist unlösbar (in jeder Dimension).

Ziel von Teil A: Konstruiere den Lebesgue'schen Maßraum $(\mathbb{R}^n, \mathscr{L}^n(\mathbb{R}^n), \lambda^n)$

Dabei: $\mathbb{R}^n$ der Grundraum, $\mathscr{L}^n(\mathbb{R}^n)$ die Lebesgue'sche $\sigma$-Algebra, $\lambda^n$ das Lebesgue-Maß

## 1. Mengensysteme

Rechnen mit Mengen, (endliche und unendliche) Schnitte und Vereinigungen, Abbildungen, Komplemente, Potenzmenge $\mathscr{P}(X)$, Rechnen in $\bar{\mathbb{R}}$

**Def (Ring)** [Elstrodt I 3.3c] Eine Familie $\mathscr{R} \subset \mathscr{P}(X)$ ist ein *Ring,* falls $\emptyset \in \mathscr{R}$ und $A, B \in \mathscr{R}$ impliziert $A \cup B \in \mathscr{R}$ und $A \setminus B \in \mathscr{R}$.

**Def (Algebra)** [Elstrodt I 3.4] Eine Familie $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ ist eine *Algebra,* falls $\mathscr{A}$ ein Ring ist und $X \in \mathscr{A}$ erfüllt ist.

Äquivalent: Eine Familie $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ ist eine *Algebra,* wenn $\emptyset \in \mathscr{A}$ und $A, B \in \mathscr{A}$ impliziert $A \cup B \in \mathscr{A}$ und $A^c \in \mathscr{A}$.

**Def ($\sigma$-Ring und $\sigma$-Algebra)** [Elstrodt I 3.6] Ein Algebra $\mathscr{A}$ heißt *$\sigma$-Algebra,* falls sie auch alle abzählbaren Vereinigungen enthält: $A_j \in \mathscr{A} \forall j \in \mathbb{N}$ impliziert $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \in \mathscr{A}$. Ebenso für *$\sigma$-Ring.*

**Def (Erzeugte Familien)** [Elstrodt I 4] Für $\sigma$-Algebren gilt (und dieselbe Beobachtung gilt auch für Ringe, Algebren und $\sigma$-Ringe): Sei $(\mathscr{A}_i)_{i\in I}$ eine beliebige Familie von $\sigma$-Algebren. Dann ist auch $\mathscr{A} := \bigcap_{i\in I} \mathscr{A}_i$ eine $\sigma$-Algebra.

Sei $A_i \subset X$, $i \in I$ eine beliebige Familie von Mengen. Die *erzeugte $\sigma$-Algebra* ist der Durchschnitt all jener $\sigma$-Algebren, die alle Mengen $A_i$ enthalten.

**Def (Borel-Mengen)** [Elstrodt I 4.1] Die *Borel-$\sigma$-Algebra* ist die $\sigma$-Algebra, die von den offenen Teilmengen von $X$ erzeugt wird. Elemente heißen *Borel-Mengen.*

**Def (Halbring)** [Elstrodt I 5.1] Eine Familie $\mathscr{H} \subset \mathscr{P}(X)$ ist ein *Halbring,* falls $\emptyset \in \mathscr{H}$ und $A, B \in \mathscr{H}$ impliziert $A \cap B \in \mathscr{H}$ und $A \setminus B$ kann als endliche disjunkte Summe geschrieben werden: $\exists C_1, \ldots, C_m \in \mathscr{H}$ so dass $A \setminus B = \bigcup_{j=1}^m C_j$.

**Def (Jordan-Lebesgue Halbring $\mathscr{J}^n$)** [Elstrodt I 5.4] Für $a = (a_1, \ldots, a_n), b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ schreiben wir $a \leq b$ falls für alle $j \leq n$ gilt: $a_j \leq b_j$. Für $a \leq b$ ist der halboffene Quader

$]a,b] = ]a_1,b_1] \times ... \times ]a_n,b_n]$. Diese Quader bilden den *Jordan-Lebesgue Halbring*

$$\mathscr{J}^n := \{\, ]a,b] \mid a \leq b\} \,.$$

**Satz 1.1 (Der erzeugte Ring)** [Elstrodt I 5.6] Der von einem Halbring erzeugte Ring ist gegeben durch endliche disjunkte Vereinigungen von Elementen.

## 2. Inhalte, Prämaße und Maße

**Def (Inhalt, Prämaß und Maß)** [Elstrodt II 1.1] Sei $\mathscr{H}$ ein Halbring über der Menge $X$. Eine Abbildung $\mu : \mathscr{H} \to \bar{\mathbb{R}}$ heißt *Inhalt,* falls (i) $\mu(\emptyset) = 0$, (ii) $\mu \geq 0$, (iii) $A_j \in \mathscr{A} \forall j \leq m$ disjunkt und $A := \bigcup_{j \leq m} A_j \in \mathscr{H}$ impliziert

$$\mu(A) = \sum_{j \leq m} \mu(A_j)\,.$$

Ein Inhalt heißt *Prämaß,* falls die letzte Eigenschaft auch für abzählbare Familien gilt, also: (iv) $A_j \in \mathscr{H} \forall j \in \mathbb{N}$ disjunkt und $A := \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \in \mathscr{H}$ impliziert

$$\mu(A) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(A_j)\,.$$

Ist $\mathscr{A} := \mathscr{H}$ eine $\sigma$-Algebra, so heißt $\mu$ ein *Maß* und das Tripel $(X, \mathscr{A}, \mu)$ ein *Maßraum.*

**Satz 2.1 (Jordan-Lebesgue-Inhalt)** Das elementargeometrische Volumen eines Quaders $]a,b]$ mit $b \geq a$ wird definiert als

$$\lambda^n(]a,b]) := (b_1 - a_1) \cdot ... \cdot (b_n - a_n)\,.$$

Dann ist $\lambda^n$ ist ein Inhalt auf dem Jordan-Lebesgue Halbring $\mathscr{J}^n$ halboffener Quader.

**Satz 2.2 (Erster Fortsetzungssatz)** [Elstrodt II 1.6] Ein Inhalt/Prämaß auf einem Halbring kann zu einem Inhalt/Prämaß auf dem erzeugten Ring fortgesetzt werden. Die Fortsetzung ist eindeutig.

**Satz 2.3 (Eigenschaften von Inhalten)** [Elstrodt II 1.7] Additivitätsaussagen für Inhalte $\mu$ auf einem Ring $\mathscr{R}$. Für $A, B \in \mathscr{R}$ und Familien $(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$ in $\mathscr{R}$ gilt:

(o) $B \subset A$ impliziert $\mu(B) \leq \mu(A)$

(a) $B \subset A$ und $\mu(B) < \infty$ impliziert $\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B)$

(b) $\mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B)$

(c) $\mu(\bigcup_{j \leq m} A_j) \leq \sum_{j \leq m} \mu(A_j)$

(d) $B \supset \bigcup_j A_j$ und $(A_j)_j$ disjunkt impliziert $\mu(B) \geq \sum_j \mu(A_j)$

(e) $\bigcup_j A_j \in \mathscr{R}$ und $(A_j)_j$ disjunkt impliziert $\mu(\bigcup_j A_j) \geq \sum_j \mu(A_j)$

(f) Ist $\mu$ ein Prämaß und $A \subset \bigcup_j A_j$, so gilt die Subadditivität, $\mu(A) \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(A_j)$.

**Satz 2.4 (Lebesgue-Prämaß)** [Elstrodt II 3.1] Der Jordan-Lebesgue-Inhalt $\lambda^n$ ist ein Prämaß auf dem Halbring $\mathscr{J}^n$ der halboffenen Quader.

## 3. Prämaß-Fortsetzung

Wir konstruieren nun aus einem Prämaß ein Maß. Insbesondere: Aus dem Lebesgue-Prämaß erhalten wir das Lebesgue-Maß.

**Def (Äußeres Maß)** [Elstrodt II 4.1] Eine Abbildung $\hat{\mu} : \mathscr{P}(X) \to \bar{\mathbb{R}}$ heißt *äußeres Maß,* falls gilt:

(a) $\hat{\mu}(\emptyset) = 0$

(b) $A \subset B \subset X$ impliziert $\hat{\mu}(A) \leq \hat{\mu}(B)$

(c) Für jede Familie $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ gilt die Subadditivität $\hat{\mu}(\bigcup_j A_j) \leq \sum_{j\in\mathbb{N}} \hat{\mu}(A_j)$.

**Satz 3.1 (Das äußere Maß zu einem Inhalt)** [Elstrodt II 4.5a] Sei $\mu$ ein Inhalt auf einem Halbring $\mathscr{H}$. Dann kann dazu ein äußeres Maß definiert werden durch

$$\hat{\mu}(A) := \inf\left\{ \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(A_j) \,\middle|\, A_j \in \mathscr{H}\, \forall j \in \mathbb{N},\, A \subset \bigcup_j A_j \right\}.$$

**Def (Messbarkeit nach Caratheodory)** [Elstrodt II 4.2] Sei $\eta : \mathscr{P}(X) \to \bar{\mathbb{R}}$ ein äußeres Maß. Eine Menge $A \subset X$ heißt *$\eta$-messbar,* falls für jedes $Q \subset X$ gilt

$$\eta(Q) = \eta(Q \cap A) + \eta(Q \setminus A).$$

**Satz 3.2 (Caratheodory)** [Elstrodt II 4.4] Sei $\eta : \mathscr{P}(X) \to \bar{\mathbb{R}}$ ein äußeres Maß. Dann ist die Menge $\mathscr{A} := \{A \subset X | A \text{ ist } \eta\text{-messbar}\}$ eine $\sigma$-Algebra. Eingeschränkt auf $\mathscr{A}$ ist $\eta$ ein Maß, $(X, \mathscr{A}, \eta|_{\mathscr{A}})$ ist also ein Maßraum.

**Satz 3.3 (Fortsetzungssatz)** [Elstrodt II 4.5] Sei $\mu$ ein Prämaß auf einem Halbring $\mathscr{H}$. Sei $\hat{\mu}$ das zugehörige äußere Maß und $\mathscr{A}$ die $\sigma$-Algebra der $\hat{\mu}$-messbaren Mengen. Dann gilt: $\mathscr{H} \subset \mathscr{A}$ und $\hat{\mu}|_{\mathscr{H}} = \mu$. Es ist also das Prämaß $\mu$ zu einem Maß auf einer $\sigma$-Algebra fortgesetzt.

**Def und Satz 3.4 (Vollständigkeit)** [Elstrodt II 6.1, 6.2] Ein Maßraum heißt *vollständig,* wenn jede Teilmenge einer Nullmenge messbar ist. Der Fortsetzungssatz liefert einen vollständigen Maßraum.

## 4. Das Lebesgue-Maß

**Satz 4.1 (Lebesgue-Maß Approximation)** [Elstrodt II 7.2] Für messbare Mengen $A \subset \mathbb{R}^n$ gilt

$$\lambda^n(A) = \inf\{\lambda^n(U) \,|\, U \supset A, U \text{ offen}\} = \sup\{\lambda^n(F) \,|\, F \subset A, F \text{ abgeschlossen}\}.$$

**Satz 4.2 (Charakterisierung der Lebesgue-Messbarkeit)** [Elstrodt II 7.4] Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist messbar, falls es für jedes $\varepsilon > 0$ eine offene Menge $U$ und eine abgeschlossene Menge $F$ gibt mit $F \subset A \subset U$ und $\lambda^n(U \setminus F) < \varepsilon$.

**Satz 4.3 (Eindeutigkeit des Lebesgue-Maßes)** [Forster, §6, Satz 1] Sei $\mu$ ein translationsinvariantes Borel-Maß auf $\mathbb{R}^n$. Für ein $\varepsilon > 0$ sei das Maß der $\varepsilon$-Kugel eine positive reelle Zahl, $\mu(B_\varepsilon(0)) \in (0,\infty)$. Dann gibt es eine Zahl $c_0 \in (0,\infty)$, so dass für alle Borel-Mengen $B$ gilt:

$$\mu(B) = c_0 \lambda^n(B)\,.$$

**Satz 4.4 (Bewegungsinvarianz)** [Forster, §6, Satz 2] Sei $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine orthogonale Matrix, also $T^T T = \mathrm{id}$. Dann gilt für jede Lebesgue-messbare Menge $B \subset \mathbb{R}^n$

$$\lambda^n(T(B)) = \lambda^n(B)\,.$$

**Satz 4.5 (Transformationsformel)** [Forster, §6, Satz 3] Sei $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix und $B \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar. Dann gilt:

$$\lambda^n(T(B)) = |\det(T)|\,\lambda^n(B)\,.$$

# B. Das Lebesgue-Integral

## 5. Integration messbarer Funktionen

**Def (Messbare Abbildungen)** Wir betrachten Abbildungen $f : \Omega \to \Omega'$ zwischen zwei Mengen, die ausgestattet sind mit $\sigma$-Algebren $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(\Omega)$ und $\mathscr{A}' \subset \mathscr{P}(\Omega')$. Die Abbildung $f$ heißt *messbar,* falls Urbilder messbarer Mengen messbar sind, also

$$B := f^{-1}(B') \in \mathscr{A} \quad \forall B' \in \mathscr{A}'\,.$$

Für Abbildungen nach $\mathbb{R}$ oder $\bar{\mathbb{R}}$ benutzen wir die Borel-$\sigma$-Algebra im Bildraum.

**Satz 5.1 (Messbarkeit numerischer Funktionen)** [Forster, §4, Satz 1] Für Abbildungen $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ mit $\sigma$-Algebra $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(\Omega)$ ist die Messbarkeit von $f$ äquivalent zu

$$f^{-1}([-\infty, c)) = \{x \in \Omega \,|\, f(x) < c\} \in \mathscr{A} \quad \forall c \in \mathbb{R}\,.$$

Testen auf Erzeugendensystem, Stetige Abbildungen, Konstruktion neuer messbarer Funktionen: Addition, Multiplikation, Potenzbildung, Supremum zweier Funktionen liefert messbare Funktionen.

**Def (Einfache Funktionen)** Eine Funktion $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ heißt *einfach,* wenn sie messbar ist und nur endlich viele Werte annimmt.

**Satz 5.2 (Approximation mit einfachen Funktionen)** [Forster, §4, Satz 5] Für jede messbare Funktion $f : \Omega \to [0,\infty]$ gibt es eine Folge einfacher Funktionen $\varphi_k$ mit $\varphi_k \nearrow f$.

Konstruktion des Integrals $\int f = \int_\Omega f\,d\mu$ für Funktionen $f : (\Omega, \mathscr{A}, \mu) \to \bar{\mathbb{R}}$ auf einem Maßraum:

1. Integral über nichtnegative einfache Funktionen (elementare Definition als Summe)

2. Integral über nichtnegative messbare Funktionen (als Limes der Integrale der von unten approximierenden einfachen Funktionen)
3. Integral über messbare Funktionen $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ (durch Zusammensetzen der Integrale von $f_+$ und $f_-$). Eine messbare Funktion ist integrierbar, falls $\int |f| < \infty$.

Alle Integralbegriffe erfüllen die wichtigen Eigenschaften

(i) Linearität 1: Für jedes $c \in \mathbb{R}$ gilt $\int cf = c \int f$

(ii) Linearität 2: Es gilt $\int (f+g) = \int f + \int g$

(iii) Monotonie: Für $f \leq g$ gilt $\int f \leq \int g$

**Satz 5.3 (Eigenschaften des Integrals)** [Forster, §4, Sätze 6, 7, 9] Die drei obigen Integralbegriffe erfüllen jeweils die drei obigen Eigenschaften (i)–(iii). Zudem, für monoton wachsende Funktionenfolgen,

(iv) Integralkonvergenz: $f_k \nearrow g$ impliziert $\int f_k \to \int g$.

**Satz 5.4 (Nullmengen und Integrale)** [Forster, §4, Satz 10] Für einen Maßraum $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ und messbare Abbildungen $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ gilt:

(a) $\int |f| = 0 \iff \{x \in \Omega \,|\, f(x) \neq 0\}$ ist eine Nullmenge

(b) $\{x \in \Omega \,|\, f(x) \in \{+\infty, -\infty\}\}$ ist eine Nullmenge

(c) Sei $g$ integrierbar und $\{f \neq g\}$ sei eine Nullmenge. Dann ist auch $f$ integrierbar und es gilt $\int f = \int g$.

Fast überall Eigenschaften, Integration über Teilmengen, Dichten

## 6. Konvergenzsätze

**Satz 6.1 (Monotone Konvergenz)** [Forster, §5, Satz 1] Auf einem Maßraum $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ sei $(f_k)_k$ eine monoton wachsende Folge von integrierbaren Funktionen $f_k : \Omega \to \mathbb{R}$. Wir nehmen an, dass die monoton wachsende Folge $(\int f_k)_k$ einen Limes in $\mathbb{R}$ hat. Dann ist auch die Funktion $f := \lim_k f_k$ integrierbar und es gilt

$$\int f = \lim_k \int f_k \,.$$

Mit Satz 6.1 kann zum Beispiel die Funktion $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ Lebesgue-integriert werden, das Integral ist 0; die Funktion ist nicht Riemann-integrierbar. Falls eine Funktion Riemann-integrierbar ist, so ist sie auch Lebesgue-integrierbar und die Integrale stimmen überein.

**Satz 6.2 (Majorisierte Konvergenz)** [Forster, §5, Satz 3] Auf einem Maßraum $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ sei $(f_k)_k$ eine Folge von integrierbaren Funktionen $f_k : \Omega \to \mathbb{R}$. Die Folge sei punktweise fast überall konvergent gegen eine Funktion $f$. Weiterhin gebe es eine *Majorante,* also eine integrierbare Funktion $F : \Omega \to \mathbb{R}$, so dass $|f_k| \leq F$ für alle $k$. Dann ist $f$ integrierbar und es gilt

$$\int f = \lim_k \int f_k \,.$$

Zudem gilt

$$\int |f_k - f| \to 0 \,.$$

**Def und Satz** $L^1(\Omega)$ ist der Raum der integrierbaren Funktionen auf $\Omega$, wobei zwei Funktionen identifiziert werden, die fast überall übereinstimmen. $L^1(\Omega)$ ist ein normierter Vektorraum.

**Satz 6.3 (Dichtheit der Treppenfunktionen)** [Forster, §5, Satz 5] Der Raum der elementaren Treppenfunktionen liegt dicht in $L^1(\Omega)$.

Satz 6.3 liefert auch die Dichtheit der stetigen Funktionen: Für offene Mengen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ist $C_c(\Omega)$ dicht in $L^1(\Omega)$.

**Satz 6.4 (Banachraum)** [Forster, §5, Satz 7] Sei $(f_k)_k$ eine Cauchy-Folge in $L^1(\Omega)$. Dann gibt es $f \in L^1(\Omega)$ mit $f_k \to f$ in $L^1(\Omega)$. Zusatz: Es gibt eine Teilfolge $(f_{k_m})_m$, die punktweise fast überall gegen $f$ konvergiert.

Cor 1: $L^1(\Omega)$ ist ein Banachraum.

Cor 2: Jede $L^1(\Omega)$-konvergente Folge besitzt eine Teilfolge, die punktweise fast überall konvergiert.

Beispiel: Es gibt eine Folge $(f_k)_k$, die in $L^1(\Omega)$ gegen 0 konvergiert, für die aber $f_k(x)$ für *kein* $x \in \Omega$ konvergiert.

## 7. Cavalieri und Fubini

In diesem Abschnitt schreiben wir kurz "Treppenfunktion" für eine elementare Treppenfunktion, also für eine Funktion $f$ der Form

$$f(x) = \sum_{j=1}^{M} c_j \mathbf{1}_{Q_j}(x)$$

für reelle Zahlen $c_j$ und halboffene Quader $Q_j \subset \mathbb{R}^n$.

**Satz 7.1 (Fubini für Treppenfunktionen)** Mit den Abkürzungen $X := \mathbb{R}^p$ und $Y := \mathbb{R}^q$ gelte $\mathbb{R}^n = X \times Y$ (also $p + q = n$). Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion. Für jedes $y \in Y$ ist die Funktion $f(.,y)$ integrierbar, die Funktion $F(y) := \int_X f(x,y)\,dx$ ist ebenfalls integrierbar, und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = \int_Y F = \int_Y \int_X f(x,y)\,dx\,dy \,.$$

**Satz 7.2 (Cavalieri)** Sei $A \subset \mathbb{R}^n = X \times Y$ eine offene beschränkte Menge, $\mathbb{R}^n = X \times Y$ wie in Satz 7.1. Für jedes $y \in Y$ betrachten wir den Schnitt $A_y := \{x \in X \,|\, (x,y) \in A\}$. Dann sind alle Schnitte $A_y \subset X = \mathbb{R}^p$ messbar mit Maß $\lambda^p(A_y)$ und es gilt

$$\lambda^n(A) = \int_Y \lambda^p(A_y)\, dy\,.$$

Beispiel 1: Die Fläche der Kreisscheibe ist $\lambda^2(B_r(0)) = r^2\pi$.

Beispiel 2: Ein Kegel $A$ mit Grundfläche $B \subset \mathbb{R}^{n-1}$ und Höhe $h$ hat das Volumen $\lambda^n(A) = (h/n)\lambda^{n-1}(B)$.

Beispiel 3: Das Volumen der Kugel ist $\lambda^3(B_r(0)) = 4r^3\pi/3$.

Unser nächstes Ziel ist es, die Formel aus Satz 7.1 für beliebige Lebesgue-integrierbare Funktionen zu zeigen. Man muss hier sehr vorsichtig sein: Zum Beispiel muss für ein integrierbares $f = f(x,y)$ die Funktion $f(.,y)$ nicht für jedes $y$ integrierbar sein. Und: Für eine messbare Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ muss der Schnitt $A_y$ nicht $\lambda^p$-messbar sein für jedes $y$.

**Satz 7.3 (Schnitte von Nullmengen)** Wir schreiben $\mathbb{R}^n = X \times Y$ mit $X := \mathbb{R}^p$ und $Y := \mathbb{R}^q$. Die Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ sei eine Nullmenge, $\lambda^n(A) = 0$. Dann gibt es eine Nullmenge $N_Y \subset Y$, so dass der Schnitt $A_y \subset X$ eine $\lambda^p$-Nullmenge ist für jedes $y \in Y \setminus N_Y$.

Beweis: Für Quader $Q$ gilt $\lambda^n(Q) = \int_Y \lambda^p(Q_y)\, dy$ (Cavalieri), dies überträgt sich mit monotoner Konvergenz auf abzählbare Quadersummen.
Wir überdecken $A$ mit Mengen $B_k$, jedes $B_k$ eine abzählbare Quadersumme, mit der monotonen Konvergenz $B_k \searrow A$ und $\lambda^n(B_k) \to 0$. Dazu betrachten wir die Funktionen $F_k(y) := \lambda^p(B_{k,y})$. Diese Funktionen sind wohldefiniert ($B_{k,y}$ ist messbar als abzählbare Quadersumme) und messbar (als monotoner Limes von Treppenfunktionen). Gemäß Vorüberlegung gilt $\int F_k = \int_Y \lambda^p(B_{k,y})\, dy = \lambda^n(B_k) \to 0$. Zudem sind die Funktionen monoton fallend, für eine Grenzfunktion $F$ gilt also $F_k \searrow F$. Das Integral der Grenzfunktion verschwindet wegen monotoner Konvergenz, $\int F = \lim_k \int F_k = 0$. Satz 5.4 liefert, dass $F$ fast überall verschwindet, also: Es gibt eine Nullmenge $N_Y^1 \subset Y$ mit $F(y) = 0$ für alle $y \in Y \setminus N_Y^1$.
Gleichzeitig gilt auch die $L^1(Y)$-Konvergenz $F_k \to F$, denn $\int |F_k - F| \leq \int F_k \to 0$. Satz 6.4 liefert uns die Existenz einer Nullmenge $N_Y^2 \subset Y$ und eine Teilfolge $k \to \infty$ (wir gehen ohne Einschränkung hiermit zu dieser Teilfolge über) mit $F_k(y) \to F(y)$ für alle $y \in Y \setminus N_Y^2$. Damit können wir schließen: Für jedes $y$, welches nicht in der Nullmenge $N_Y := N_Y^2 \cup N_Y^2$ liegt, gilt $\lambda^p(A_y) \leq \lambda^p(B_{k,y}) = F_k(y) \to 0$, also $\lambda^p(A_y) = 0$. Der letzte Beweisschritt zeigt insbesondere die Messbarkeit von $A_y$. $\square$

**Satz 7.4 (Fubini)** Wir betrachten wieder $X := \mathbb{R}^p$, $Y := \mathbb{R}^q$, und $\mathbb{R}^n = X \times Y$. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ integrierbar. Dann gilt:

(a) Es gibt eine Nullmenge $N_Y \subset Y$, so dass für jedes $y \in Y \setminus N_Y$ die Funktion $f(.,y)$ integrierbar über $X$ ist.

(b) Wir betrachten die Funktion $F : Y \to \bar{\mathbb{R}}$, definiert durch $F(y) := \int_X f(x,y)\, dx$ für $y \in Y \setminus N_Y$, $F(y) := 0$ für $y \in N_Y$. Dann ist $F$ integrierbar über $Y$ und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = \int_Y F\,.$$

Beweis: Satz 6.3 impliziert, dass es eine Folge von Treppenfunktionen $f_k$ gibt, die $f$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$ approximieren, $\|f_k - f\|_{L^1} \to 0$. Durch Übergang zu einer Teilfolge können zwei Dinge erreicht werden: $\sum_k \|f_{k+1} - f_k\|_{L^1} < \infty$ und $f_k \to f$ punktweise fast überall, also überall bis auf Punkte $x \in A$, $\lambda^n(A) = 0$. Satz 7.3 liefert eine erste Nullmenge $N_Y^1 \subset Y$, so dass $A_y$ eine Nullmenge ist für alle $y \in Y \setminus N_Y^1$.

Für $y \in Y$ betrachten wir die Funktionen $f_k^y(x) := f_k(x,y)$ und $f^y(x) := f(x,y)$. Zusätzlich die Funktionen $H_k(y) := \|f_{k+1}^y - f_k^y\|_{L^1(X)}$ mit den Eigenschaften (wir nutzen hier Fubini für Treppenfunktionen)

$$\int_Y H_k = \int_Y \|f_{k+1}^y - f_k^y\|_{L^1(X)} = \|f_{k+1} - f_k\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\,, \qquad \int_Y \sum_k H_k = \sum_k \int_Y H_k < \infty\,.$$

Die letzte Gleichheit gilt wegen monotoner Konvergenz. Sie impliziert, dass $\sum_k H_k(y)$ endlich ist für jedes $y \in Y \setminus N_Y^2$, wobei $N_Y^2$ eine Nullmenge ist (wir benutzen Satz 5.4). Im Folgenden betrachten wir nie Punkte in der Nullmenge $N_Y := N_Y^1 \cup N_Y^2$.

Sei $y \in Y \setminus N_Y$ ein beliebiger Punkt. Da $\sum_k H_k(y)$ endlich ist, ist $f_k^y$ eine Cauchy-Folge in $L^1(X)$. Nach Satz 6.4 gibt es eine Grenzfunktion $f_*^y$ und eine Teilfolge $k \to \infty$ (ohne neuen Namen), so dass $f_k^y \to f_*^y$ punktweise fast überall und in $L^1(X)$. Da die $f_k^y$ auch punktweise fast überall gegen $f^y$ konvergieren (Wahl von $N_Y^1$), gilt $f_*^y = f^y$. Der $L^1$-Limes $f^y$ der $f_k^y$ ist integrierbar; dies zeigt (a).

Wir betrachten nun

$$F(y) := \int_X f^y(x)\,dx \leftarrow \int_X f_k^y(x)\,dx =: F_k(y)\,.$$

Um aus diesem punktweisen Limes $F_k \to F$ die Konvergenz der Integrale zu folgern, müssen wir lediglich wieder die Cauchy-Folgen Eigenschaft ausnutzen: Es gilt $\|F_{k+1} - F_k\|_{L^1(Y)} \le \|f_{k+1} - f_k\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$ (wir nutzen wieder Fubini für Treppenfunktionen), und dies ist summierbar. Es gilt also die $L^1(Y)$-Konvergenz $F_k \to F_*$ für eine Grenzfunktion $F_*$, die aber wegen der punktweise Konvergenz mit $F$ übereinstimmen muss. Damit können wir schließlich rechnen (in der zweiten Gleichheit wieder mit Fubini für Treppenfunktionen):

$$\int F(y)\,dy = \lim_k \int F_k(y)\,dy = \lim_k \int_Y \int_X f_k(x,y)\,dx\,dy = \int_Y \int_X f(x,y)\,dx\,dy\,.$$

□

Die Integrierbarkeit von $f$ kann mit nachfolgendem Satz festgestellt werden.

**Satz 7.5 (Tonelli)** Sei $X := \mathbb{R}^p$, $Y := \mathbb{R}^q$, und $f : R^n = X \times Y \to \bar{\mathbb{R}}$ messbar. Der nachfolgende Ausdruck sei wohldefiniert und endlich:

$$\int_Y \left( \int_X |f(x,y)|\,dx \right) dy < \infty\,.$$

Dann ist $f$ integrierbar und insbesondere der Satz von Fubini anwendbar.

Beweis: Wir verwenden die Technik des Abschneidens. Es muss nur $\int |f| < \infty$ gezeigt werden. Mit Quadern $Q_k := [-k,k]^n$ betrachten wir die Funktionen $f_k := \min(|f|,k)\,\mathbf{1}_{Q_k}$.

Es gilt $f_k \to |f|$ mit monotoner Konvergenz. Die Integrale über $f_k$ können mit dem Satz von Fubini abgeschätzt werden, denn

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_k = \int_Y \int_X f_k(x,y)\,dx\,dy \le \int_Y \int_X |f|(x,y)\,dx\,dy < \infty .$$

Der Satz über die monotone Konvergenz liefert die Integrierbarkeit der Grenzfunktion $|f|$.

□

## 8. Transformationsformel

Notation: $\Phi : U \to V$ sei eine Abbildung zwischen offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, sie sei $C^1$, also stetig differenzierbar, sie sei invertierbar und die Inverse $\Phi^{-1} : V \to U$ sei auch $C^1$. Die Ableitungsmatrix in einem Punkt $x \in U$ wird mit $D\Phi(x)$ bezeichnet.

Hilfssatz: Sei $\Phi$ wie oben, $x_0 \in U$ und $T := D\Phi(x_0)$. Dann gibt es für jede Fehlerschranke $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass für jeden Würfel $W$ mit $x_0 \in W$ und Kantenlänge kleiner als $\delta$ gilt:

$$\left| \frac{\lambda^n(\Phi(W))}{\lambda^n(W)} - |\det T| \right| < \varepsilon .$$

**Satz 8.1 (Transformationsformel für stetige Funktionen)** [Forster, §9, Satz 1] Für eine stetige Funktion $f : V \to \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger gilt

$$\int_V f(y)\,d\lambda^n(y) = \int_U f(\Phi(x))\,|\det D\Phi(x)|\,d\lambda^n(x) . \qquad (*)$$

**Satz 8.2 (Transformationsformel)** [Forster, §9, Satz 2] Eine Funktion $f : V \to \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar, wenn $f \circ \Phi\,|\det D\Phi| : U \to \mathbb{R}$ integrierbar ist. In diesem Fall gilt die Formel (*).

Beispiel 1: Ebene Polarkoordinaten. Damit: Gaußfunktion integrieren

Beispiel 2: Räumliche Polarkoordinaten

Beispiel 3: Newton-Potential einer Kugel

## 9. Anwendungen der Integralsätze

Dies ist das erste Kapitel nach der Weihnachtspause. Daher wird zu Beginn dieses Kapitels der bisherige Stoff wiederholt.

Der neue Stoff dieses Kapitels umfasst vier kleinere Themen.

*Teilung der Eins*

Wir konstruieren eine Funktion $\alpha : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ von der Klasse $C^\infty$ mit Träger in $[-1,1]^n \subset \mathbb{R}^n$ und mit der Eigenschaft

$$\sum_{p \in \mathbb{Z}^n} \alpha(x-p) = 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n .$$

Dazu kann dann auch die Familie $\alpha_{\varepsilon p}(x) := \alpha((x - \varepsilon p)/\varepsilon)$ konstruiert werden, wobei $\alpha_{\varepsilon p}$ Träger in einem $2\varepsilon$-Würfel um $\varepsilon p$ hat und so dass $\sum_{p \in \mathbb{Z}^n} \alpha_{\varepsilon p} \equiv 1$ auf $\mathbb{R}^n$.

**Satz 9.1 (Abschneidefunktion)** [Forster, §10, Satz 1] Für $K \subset U \subset \mathbb{R}^n$ mit kompaktem $K$ und offenem $U$ gibt es eine Funktion $\beta \in C_c^\infty(U)$ mit $\beta|_K \equiv 1$.

*Partielle Integration*

**Satz 9.2 (Partielle Integration)** [Forster, §10, Satz 2] Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $i \in \{1, ..., n\}$ ein Richtungsindex. Für Funktionen $f, g, \varphi \in C^1(U)$ nehmen wir an, dass $g$ und $\varphi$ Nullrandwerte haben: Es gelte $g, \varphi \in C_c^1(U)$. Dann gilt:

$$\int_U \partial_i \varphi = 0$$

und

$$\int_U (\partial_i f)\, g = -\int_U f\, (\partial_i g) .$$

*Laplace-Operator in neuen Koordinaten*

Zur Motivation betrachten wir ebene Polarkoordinaten, also die Abbildung $\Phi : (r, \varphi) \mapsto (x, y) = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$. Eine Funktion $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto u(x,y)$ sei in Polarkoordinaten angegeben, also $u(x,y) = \tilde{u}(r, \varphi)$. In knapper Formel schreiben wir $u = \tilde{u} \circ \Phi^{-1}$ oder $\tilde{u} = u \circ \Phi$. Man denke zum Beispiel an die Funktion $\tilde{u}(r, \varphi) = r\cos(\varphi)$. In den kartesischen Koordinaten ist dies die Funktion $u(x,y) = x$.

Wenn wir $\Delta u = \partial_x^2 u + \partial_y^2 u$ berechnen wollen, so wollen wir dies eventuell mit dem (oft) einfacheren Ausdruck für $\tilde{u}$ tun, nicht mit der transformierten Funktion $u$. Wir können allerdings *nicht* erwarten, dass $\Delta u = \partial_x^2 u + \partial_y^2 u$ dasselbe ist wie $\partial_r^2 \tilde{u} + \partial_\varphi^2 \tilde{u}$. Die Frage lautet daher: Wie berechnet man $\Delta u$ aus den Ableitungen von $\tilde{u}$?

Für eine $C^1$-invertierbare Transformation $\Phi : \Omega' \to \Omega$ setzen wir:

$$g_{ij} := \left\langle \partial_i \Phi, \partial_j \Phi \right\rangle , \quad g := \det(g_{ij}) , \quad \text{also } \sqrt{g} = |\det(D\Phi)| .$$

Die Matrix $(g^{kl})$ sei die zu $(g_{ij})$ inverse Matrix.

**Satz 9.3 (Laplace-Operator in neuen Koordinaten)** [Forster, §10, Satz 4] Der Laplace-Operator in neuen Koordinaten ist definiert durch $\Delta^\Phi \tilde{u} = (\Delta u) \circ \Phi$. Es gilt

$$\Delta^\Phi = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{k,l} \partial_l \left( g^{kl} \sqrt{g} \partial_k \right) .$$

Für das obige Beispiel der Polarkoordinaten gilt: $\partial_1\Phi = (\cos(\varphi),\sin(\varphi))$ und $\partial_2\Phi = (-r\sin(\varphi), r\cos(\varphi))$, also $G = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$ und $G^{-1} = (g^{kl}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/r^2 \end{pmatrix}$ und $\sqrt{g} = r$. Daher

$$(\Delta u)\circ\Phi = \Delta^\Phi \tilde{u} = \frac{1}{\sqrt{g}}\sum_{k,l}\partial_l\left(g^{kl}\sqrt{g}\partial_k\tilde{u}\right) = \frac{1}{r}\partial_r\left(r\partial_r\tilde{u}\right) + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2\tilde{u}\,,$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass in der Summe nur $(k,l) = (1,1)$ und $(k,l) = (2,2)$ betrachtet werden muss. Wir haben im letzten Schritt eine suggestive Notation verwendet: Statt $\partial_1$ haben wir $\partial_r$ geschrieben und statt $\partial_2$ haben wir $\partial_\varphi$ geschrieben.

Für die Funktion $u(x,y) = x$, also $\tilde{u}(r,\varphi) = r\cos(\varphi)$, erhalten wir $\Delta u = \partial_x^2(x) = 0$ und $\Delta^\Phi\tilde{u} = \frac{1}{r}\partial_r\left(r\partial_r(r\cos(\varphi))\right) + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2(r\cos(\varphi)) = \frac{1}{r}\cos(\varphi) - \frac{1}{r}\cos(\varphi) = 0$.

Ebenso kann man nachrechnen, dass für $m \in \mathbb{N}$ die Funktion $u$ mit $\tilde{u}(r,\varphi) = r^m\cos(m\varphi)$ harmonisch ist, also $\Delta u = 0$ erfüllt.

*Ein parameterabhängiges Integral*

In der Formulierung des nachfolgendes Satzes sprechen wir von dem Lebesgue-Integral auf Teilmengen des $\mathbb{R}^n$. Diese Einschränkung des Maßraumes ist eigentlich nicht notwendig, für eine allgemeinere Formulierung siehe Forster.

**Satz 9.4 (Parameterabhängiges Integral)** [Forster, §11, Satz 1] Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ messbar und $U \subset \mathbb{R}^m$ ein Parametergebiet. Die Funktion $f : \Omega \times U \to \mathbb{R}$, $f = f(x,t)$ habe die folgenden Eigenschaften:

(a) Für jedes $t \in U$ sei $f(.,t)$ integrierbar über $\Omega$

(b) Für jedes $x \in \Omega$ sei $f(x,.)$ stetig in $U$

(c) Es gibt eine Majorante, $G \in L^1(\Omega)$ mit $f(x,t) \le G(x)$ für alle $x$ und $t$

Dann ist die Abbildung $t \mapsto \int_\Omega f(.,t)$ stetig auf $U$.

## 10. Die $L^p$-Räume

In diesem Abschnitt ist immer ein Maßraum $(\Omega,\mathscr{A},\mu)$ zugrunde gelegt.

Für eine reelle Zahl $p \in [1,\infty)$ und eine messbare Funktion $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ definiert man einen Ausdruck, der später die $L^p(\Omega)$-Norm sein wird:

$$\|f\|_{L^p} := \left(\int_\Omega |f|^p\right)^{1/p}.$$

Wir erinnern an die Young-Ungleichung für zwei positive reelle Zahlen $a$ und $b$ und duale Exponenten $p,q$, also $1/p + 1/q = 1$:

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\,.$$

**Satz 10.1 (Hölder-Ungleichung)** [Forster, §12, Satz 1] Seien $f,g:\Omega\to\bar{\mathbb{R}}$ messbar und $p,q\in(1,\infty)$ dual in dem Sinne, dass

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

erfüllt ist. Dann gilt

$$\|fg\|_{L^1}\leq\|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}\,.$$

**Corollar (Dreiecks-Ungleichung / Minkowski-Ungleichung)** Für $p\in[1,\infty)$ und $f,g:\Omega\to\bar{\mathbb{R}}$ messbar gilt

$$\|f+g\|_{L^p}\leq\|f\|_{L^p}+\|g\|_{L^p}\,.$$

**Definition (Der Raum $L^p(\Omega)$)** Für einen Maßraum $(\Omega,\mathscr{A},\mu)$ und eine Zahl $p\in[1,\infty)$ definieren wir

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^p(\Omega)&:=\{f:\Omega\to\mathbb{R}\,|\,f\text{ messbar mit }\|f\|_{L^p(\Omega)}<\infty\}\,,\\ \mathscr{N}&:=\{f:\Omega\to\mathbb{R}\,|\,f(x)=0\text{ für fast alle }x\in\Omega\}=\{f:\Omega\to\mathbb{R}\,|\,\|f\|_{L^p(\Omega)}=0\}\,,\\ L^p(\Omega)&:=\mathscr{L}^p(\Omega)/\mathscr{N}\,.\end{aligned}$$

Man überprüft leicht, dass $L^p(\Omega)$ ein normierter Vektorraum ist.

Beispiel 1: Die Funktion $f(x)=x^\alpha$ auf $x\in(0,1)$ ist in $L^p((0,1))$ für $\alpha p>-1$.

Beispiel 2: Die Funktion $f(x)=x^\alpha$ auf $x\in(1,\infty)$ ist in $L^p((0,1))$ für $\alpha p<-1$.

Beispiel 3: Die Funktion $f(x)=\|x\|^\alpha$ auf $x\in(-1,1)^n\subset\mathbb{R}^n$ ist in $L^p$ für $\alpha p>-n$.

Merkregel: Für $q>p$ ist der Raum $L^q$ besser als $L^p$, falls das Gebiet beschränkt ist. Wenn es dagegen um den Abfall von Funktionen geht, so ist eine Kontrolle in $L^p$ besser.

Die nächsten Sätze formulieren wir sehr knapp, damit sie leicht erfasst werden können.

**Satz 10.2 (Majorisierte Konvergenz in $L^p$)** [Forster, §12, Satz 4] $f_k\to f$ punktweise fast überall und mit Majorante, $|f_k|\leq F$ mit $F\in L^p$. Dann auch $f\in L^p$ und $f_k\to f$ in $L^p$.

**Satz 10.3 (Cauchyfolgen in $L^p$)** [Forster, §12, Satz 5] $f_k$ eine $L^p$-Cauchyfolge. Dann gibt es $f\in L^p$ mit $f_k\to f$ in $L^p$. Zudem konvergiert eine Teilfolge punktweise fast überall.

**Corollar** $L^p(\Omega)$ ist ein Banachraum.

**Satz 10.4 (Dichtheit in $L^p$)** [Forster, §12, Satz 6] $C^0_c(\mathbb{R}^n)$ liegt dicht in $L^p(\mathbb{R}^n)$.

**Corollar** Auch $C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ liegt dicht in $L^p(\mathbb{R}^n)$.

# C. Arbeiten mit Integralen

## 11. Fourier-Reihen

Ein Nachtrag aus der Analysis 1; jetzt gut fundiert mit dem Raum $L^2$. Unsere Darstellung ist nicht unähnlich zu der in: W. Walter, Analysis 2, §10, Springer Verlag.

*Teil A: Motivation und Notation*

Ziel: Entwickle eine periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ als harmonische Reihe,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(kx) \; + \; \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx) \, .$$

Dieses Ziel war historisch wichtig und ist auch heute ein zentraler Baustein der Analysis. In der Analyse ist der Raum $L^2$ wichtig.

Notation: Hier betrachten wir äquivalent (aber eleganter) Funktionen $f : (0, 2\pi) \to \mathbb{C}$. Unser Ziel ist es, $f$ in eine harmonische Reihe zu entwickeln,

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \Phi_k(x) \quad \text{mit} \quad \Phi_k(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} \, . \tag{*}$$

Wir verwenden den Hilbertraum $L^2_{2\pi} := L^2((0, 2\pi); \mathbb{C})$ mit dem Skalarprodukt $\langle f, g \rangle := \int_{(0,2\pi)} f(x) \cdot \overline{g(x)} \, dx$ und der $L^2$-Norm $\|f\|^2 = \langle f, f \rangle$.

Einfache Beobachtungen:

(o) Die Funktionen $(\Phi_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ sind orthogonal im Raum $L^2_{2\pi}$.

(i) Es gelte (*) in dem Sinne, dass die Funktionen $f_N := \sum_{|k| \leq N} c_k \Phi_k$ die Konvergenz $f_N \to f$ in $L^2_{2\pi}$ für $N \to \infty$ erfüllen. Dann gilt $c_k = \langle f, \Phi_k \rangle$.

(ii) Die Abbildung $\mathscr{F} : L^2_{2\pi} \to \ell^2(\mathbb{Z})$, $f \mapsto (c_k)_k$ mit $c_k = \langle f, \Phi_k \rangle$ ist wohldefiniert und linear. Wesentlich ist hier eine Form der Bessel'schen Ungleichung, die man aus $0 \leq \|f - \sum_{|k| \leq N} c_k \Phi_k\|^2$ erhält.

(iii) Die Umkehrung$^{(?)}$ $\mathscr{F}^* : \ell^2(\mathbb{Z}) \to L^2_{2\pi}$, definiert durch $(c_k)_k \mapsto f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \Phi_k$ ist wohldefiniert (die Reihe konvergiert in $L^2_{2\pi}$ gegen eine Grenzfunktion $f$) und linear. Bei dieser Beobachtung spielt die Vollständigkeit von $L^2_{2\pi}$ eine Rolle. Wegen (i) ist $\mathscr{F}^*$ eine Rechtsinverse, $\mathscr{F} \circ \mathscr{F}^* = \mathrm{id}$. Später sehen wir, dass $\mathscr{F}^*$ tatsächlich eine Umkehrabbildung von $\mathscr{F}$ ist.

*Teil B: Formulierung im Hilbertraum, vollständige Orthonormalsysteme*

**Definition (ONS)** Im Hilbertraum $H$ heißt eine Familie $(\Phi_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ von Elementen $\Phi_k \in H$ ein Orthonormalsystem (ONS), falls $\langle \Phi_k, \Phi_l \rangle = \delta_{kl}$ für alle $k, l \in \mathbb{Z}$.

**Definition ($\mathscr{F}$ und $\mathscr{F}^*$)** Wir betrachten die Abbildungen

$$\begin{aligned} \mathscr{F} &: H \to \ell^2(\mathbb{Z}) \, , \quad f \mapsto (\langle f, \Phi_k \rangle)_k && \text{(Fourier-Koeffizienten)} \\ \mathscr{F}^* &: \ell^2(\mathbb{Z}) \to H \, , \quad (c_k)_k \mapsto \sum c_k \Phi_k && \text{(Rekonstruktion)} \end{aligned}$$

**Satz 11.1 ($\mathscr{F}$ und $\mathscr{F}^*$)** Die Abbildungen $\mathscr{F}$ und $\mathscr{F}^*$ sind wohldefiniert, linear und stetig, es gilt $\mathscr{F} \circ \mathscr{F}^* = \mathrm{id}$.

Bestapproximation: Sei $(\Phi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ ein Orthonormalsystem im Hilbertraum $H$. Die Indexmenge $A \subset \mathbb{Z}$ sei endlich. Dann liefert unter allen Funktionen $g = \sum_{k\in A} \alpha_k \Phi_k$ die Wahl $\alpha_k = c_k := \langle f, \Phi_k \rangle$ die beste Approximation für $f$. Genauer:

$$\|f-g\|^2 = \|f\|^2 - \sum_A |c_k|^2 + \sum_A |\alpha_k - c_k|^2 .$$

Beweis durch Auswerten der linken Seite.

**Satz 11.2 ($\mathscr{F}^* \circ \mathscr{F}$ und Konvergenz)** Sei $(\Phi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ ein ONS im Hilbertraum $H$. Für ein Element $f \in H$ betrachten wir die Koeffizienten $c := \mathscr{F}(f)$, also $c_k = \langle f, \Phi_k \rangle$. Weiterhin betrachten wir die Funktion $f^* := \mathscr{F}^*(c)$, also $f^* = \sum c_k \Phi_k$. Dann gilt folgende Normidentität und Orthogonalität:

$$\|f-f^*\|^2 = \|f\|^2 - \sum_A |c_k|^2 , \qquad \langle f-f^*, \Phi_k \rangle = 0 \;\forall k .$$

**Definition (vONS)** Sei $(\Phi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ ein ONS im Hilbertraum $H$. Das System heißt *vollständiges ONS* (vONS) falls für jedes $f \in H$ gilt:

$$\langle f, \Phi_k \rangle = 0 \;\forall k \quad \Rightarrow \quad f = 0 .$$

**Satz 11.3 (Darstellungssatz)**Sei $(\Phi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ ein vONS im Hilbertraum $H$. Dann gilt für jedes Element $f \in H$

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \Phi_k \quad \text{mit} \quad c_k := \langle f, \Phi_k \rangle .$$

Es gilt die Bessel'sche Gleichung und die Parseval'sche Gleichung für $f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \Phi_k$ und $g = \sum_{k\in\mathbb{Z}} d_k \Phi_k$:

$$\|f\|^2 = \sum_k |c_k|^2 , \qquad \langle f, g \rangle = \sum_k c_k \cdot \bar{d}_k .$$

Also: $\mathscr{F}^*$ ist eine Inverse zu $\mathscr{F}$ und $\mathscr{F} : H \to \ell^2(\mathbb{Z})$ ist ein Hilbertraumisomorphismus.

*Teil C: Approximationssätze, Vollständigkeit*

Ab hier wieder: Hilbertraum $H = L^2_{2\pi}$ und die Basisfunktionen $\Phi_k(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$. Wir verwenden die Notation $c_k(f) := \langle f, \Phi_k \rangle$ und $I := (0, 2\pi)$.

Einige elementare Rechenregeln:

$$|c_k(f)| = \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} \, dx \right| \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_{L^1} \qquad \forall f \in L^1(I)$$

$$c_k(f') = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x)(-ik) e^{-ikx} \, dx = ik\, c_k(f) \qquad \forall f \in C^1_c(I)$$

$$|c_k(f)| = \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f''(x) \frac{1}{-k^2} e^{-ikx} \, dx \right| \le \frac{1}{\sqrt{2\pi} k^2} \|f\|_{C^2} \qquad \forall f \in C^2_c(I)$$

$$c_k(e^{ix} f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-i(k-1)x} \, dx = c_{k-1}(f) \qquad \forall f \in L^1(I)$$

In der zweiten und dritten Rechnung reicht es, wenn $f \in C^1(\mathbb{R})$ beziehungsweise $f \in C^2(\mathbb{R})$ und die $2\pi$-Periodizität gefordert wird. In der zweiten Rechnung passt das Ergebnis zum formalen Differenzieren der Darstellung von $f$. Die dritte Rechnung impliziert die gleichmäßige Konvergenz der Fourierreihe für $f \in C_c^2(I)$.

**Satz 11.4 (Riemann-Lebesgue)** Sei $f \in L^1(I)$. Dann ist entlang jeder Folge $(k_l)_l$ mit $|k_l| \to \infty$ die zugehörige Folge $c_k = \langle f, \Phi_k \rangle$ eine Nullfolge.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Approximiere $f$ in $L^1(I)$ durch eine Funktion $g \in L^2(I)$, $\|f - g\|_{L^1} < \varepsilon$ (möglich wegen Dichtheit glatter Funktionen). Es gilt $c_k(f) = c_k(g) + c_k(f-g)$ mit $(c_k(g))_k \in \ell^2(\mathbb{Z})$ (also eine Nullfolge) und $|c_k(f-g)| \le \|f-g\|_{L^1}/\sqrt{2\pi} < \varepsilon/2$. Es folgt: Für großes $|k|$ gilt $|c_k(f)| < \varepsilon$. $\square$

**Satz 11.5 (Konvergenz in einem Punkt)** [Walter, §10, 10.3] Sei $f \in L^2_{2\pi}$, $a \in (0, 2\pi)$ ein Punkt und $y \in \mathbb{C}$ ein Wert. Die Funktion $f$ habe die Regularität, dass die Quotientenfunktion $g(x) := (f(x) - y)/(x - a)$ von der Klasse $g \in L^1((0, 2\pi))$ ist. Dann konvergiert die Fourierreihe im Punkt $a$ gegen $y$, also: $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \Phi_k(a) = y$.

Beweis: Ohne Einschränkung sei $y = 0$. Wir betrachten die neue Funktion

$$h(x) := \frac{f(x)}{e^{i(x-a)} - 1} = g(x)\, \frac{x - a}{e^{i(x-a)} - 1}\,.$$

Wegen $g \in L^1$ und Beschränktheit des Faktors gilt $h \in L^1$. Wir berechnen für $k \in \mathbb{Z}$ den $k$-ten Fourierkoeffizienten von $f = (e^{i(x-a)} - 1)\, h(x)$ als

$$c_k(f) = c_k(e^{i(x-a)} h(x)) - c_k(h(x)) = e^{-ia} c_k(e^{ix} h(x)) - c_k(h(x)) = e^{-ia} c_{k-1}(h) - c_k(h)\,.$$

Daher ist, wir summieren über $-N \le k \le N$,

$$\begin{aligned}
f^*(a) &= \sum_k c_k(f) \Phi_k(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_k c_k(f) e^{ika} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_k \left(e^{-ia} c_{k-1}(h) - c_k(h)\right) e^{ika} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_k \left(c_{k-1}(h) e^{i(k-1)a} - c_k(h) e^{ika}\right) \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} c_N(h) e^{iNa} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} c_{-N-1}(h) e^{i(-N-1)a} \to 0
\end{aligned}$$

für $N \to \infty$ wegen Satz 11.4 von Riemann-Lebesgue. Es gilt also $f^*(a) = 0 = y$ wie behauptet. $\square$

**Corollar** Sei $f \in L^2_{2\pi}$ so, dass die periodische Fortsetzung $\tilde{f}$ auf $\mathbb{R}$ Hölderstetig ist. Dann konvergiert die Fourierreihe punktweise gegen $f$. Insbesondere konvergiert die Fourierreihe punktweise für $f \in C^1$ und für Lipschitz-stetige $f$.

**Satz 11.6 (Vollständigkeit)** Die Basisfunktionen $(\Phi_k)_k$ aus (*) sind ein vollständiges Orthonormalsystem in $L^2_{2\pi}$.

Beweis: Sei $f \in L^2_{2\pi}$ mit $\langle f, \Phi_k \rangle = 0$ für alle $k$, also $f^* = \sum_k c_k(f) \Phi_k = 0$ (Konvergenz der Reihe in $L^2_{2\pi}$). Wir setzen $\varepsilon := \|f\|_{L^2}/3$. Annahme: $\varepsilon > 0$ (falls dies falsch ist, so ist $f = 0$ bewiesen). Wegen Dichtheit von $C_c^\infty$ in $L^2$ können eine Funktion $g \in C_c^1((0, 2\pi))$ wählen

mit $\|f-g\|_{L^2}<\varepsilon$. Die Dreiecksungleichung liefert $\|g\|_{L^2}\geq\|f\|_{L^2}-\|f-g\|_{L^2}\geq 2\varepsilon$. Die Funktion $g$ ist differenzierbar, daher konvergiert die Fourierreihe punktweise gegen $g$. Andererseits konvergiert die Fourierreihe in $L^2$ gegen $g^*$. Eine Teilfolge konvergiert daher auch punktweise fast überall gegen $g^*$, so dass $g=g^*$ fast überall gilt.
Nun rechnen wir mit Hilfe der allgemeinen Ungleichung $\|h^*\|_{L^2}^2=\sum_k|c_k(h)|^2\leq\|h\|_{L^2}^2$ für $h=g-f$:

$$\|g\|_{L^2}=\|g^*\|_{L^2}=\|g^*-f^*\|_{L^2}=\|(g-f)^*\|_{L^2}\leq\|g-f\|_{L^2}<\varepsilon\,.$$

Die linke Seite ist aber mindestens $2\varepsilon$, ein Widerspruch.

*Teil D: Reelle Regeln und ein Beispiel*

Reelle Formeln: $f\in L^2((0,2\pi);\mathbb{R})$ lässt sich (mit Konvergenz in $L^2$) schreiben als

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx))$$

mit

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\,\cos(kx)\,dx\,,\qquad b_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\,\sin(kx)\,dx\,.$$

Für die Umrechnung der Koeffizienten betrachtet man $k\geq 1$ und

$$\begin{aligned}c_ke^{ikx}+c_{-k}e^{-ikx}&=c_k(\cos(kx)+i\sin(kx))+c_{-k}(\cos(kx)-i\sin(kx))\\&=(c_k+c_{-k})\cos(kx)+i(c_k-c_{-k})\sin(kx)\,.\end{aligned}$$

Daher gilt $a_0=2c_0/\sqrt{2\pi}$ und, für $k\geq 1$:

$$a_k=(c_k+c_{-k})/\sqrt{2\pi}\quad\text{ und }\quad b_k=i(c_k-c_{-k})/\sqrt{2\pi}\,.$$

Diese Formeln lassen sich auch leicht umkehren: $c_0=\sqrt{2\pi}a_0/2$ und $c_k=\sqrt{2\pi}(a_k-ib_k)/2$ und $c_{-k}=\sqrt{2\pi}(a_k+ib_k)/2$ für $k\geq 1$. Man beachte, dass sowohl bei Forster als auch bei Walter die $c_k$ die Vorfaktoren vor $e^{ikx}$ sind, es gibt also immer einen Faktor $\sqrt{2\pi}$ im Vergleich zu diesen Vorlagen.

Beispiel: Die Sägezahnfunktion $h(x)=(\pi-x)/2$. Es gilt $c_0=0$ und $c_k=\sqrt{2\pi}/(2ik)$ für $k\neq 0$. Reell geschrieben gilt

$$h(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(kx)}{k}\,.$$

Mit der Bessel'schen Gleichung im zweiten Schritt erhalten wir die schöne Formel

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{2^2}{2\cdot 2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|c_k|^2=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|h|^2=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}(x-\pi)^2=\frac{1}{12\pi}(x-\pi)^3\Big|_{x=0}^{2\pi}=\frac{\pi^2}{6}\,.$$

Das Kapitel wird mit Bemerkungen zu geraden und ungeraden Fortsetzungen beendet. Insbesondere: Jede Funktion $f:(0,\pi)\to\mathbb{R}$ lässt sich in Sinusfunktionen entwickeln, $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\tilde{b}_k\sin(kx)$. Man beachte, dass hier die Basisfunktionen nicht periodisch sind (das ist hier so gemeint, dass die periodische Fortsetzung von $\sin(kx)$ für ungerades $k$ nicht in $C^1(\mathbb{R})$ ist).

## 12. Integration über Untermannigfaltigkeiten

Vieles ist ähnlich zu [Forster, §14], wir kürzen allerdings den Weg deutlich ab. Zunächst erinnern wir an die Definition aus der Analysis 2, siehe Forster 2, §9:

**Definition (Untermannigfaltigkeit)** Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt $k$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$, wenn es zu jedem Punkt $a \in M$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ gibt, eine offene Teilmenge $T \subset \mathbb{R}^k$ und eine Immersion $\varphi : T \to \mathbb{R}^n$, so dass $\varphi$ die Menge $T$ homöomorph auf $\varphi(T) = M \cap U$ abbildet.

Um die Notation zu vereinfachen, nehmen wir im Folgenden an, dass man die Mannigfaltigkeit $M$ mit endlich vielen solchen Abbildungen $\varphi$ (genannt "lokale Koordinatensysteme" oder "Parameterdarstellungen") überdecken kann. Dies ist zum Beispiel der Fall, wenn die Mannigfaltigkeit kompakt ist. Zudem nehmen wir immer an, dass die Abbildungen differenzierbar sind. Also: Für $j \in \{1,...,J\}$ gibt es $T_j \subset \mathbb{R}^k$ offen und ein differenzierbares $\varphi_j : T_j \to \mathbb{R}^n$, so dass $M \subset \bigcup_j \varphi_j(T_j)$.

**Definition (Integral in einem Kartengebiet)** Sei $M$ eine $k$-dimensionale Mannigfaltigkeit wie oben und $f : M \to \mathbb{R}$ eine Abbildung, so dass $\operatorname{supp}(f) \subset V := \varphi(T)$ für ein $\varphi = \varphi_j$ und $T = T_j$. Dann setzen wir

$$\int_M f := \int_M f(x)\, dS(x) := \int_V f(x)\, dS(x) := \int_T f(\varphi(t))\, \sqrt{g(t)}\, d^k t$$

mit $g = \det(G)$ für die Matrix $G = (D\varphi)^T D\varphi$. Wie $\varphi$ hängen auch $G$ und $g$ vom Punkt $t \in T$ ab; $G(t)$ ist eine $k \times k$ Matrix $G(t) = (g_{lm}(t))_{lm}$. Die Einträge sind Skalarprodukte der Spalten: $g_{lm} = \partial_l \varphi \cdot \partial_l \varphi = \sum_{q=1}^n \partial_l \varphi_q \, \partial_l \varphi_q$. Hier bezeichnet $\varphi_q$ die $q$-te Komponente des Vektors.

**Lemma (Wohldefiniertheit bezüglich Parameter-Transformation)** Ein Teil von $M$ werde durch zwei lokale Koordinatensysteme beschrieben. Wir betrachten $\varphi : T \to \mathbb{R}^n$ und $\tilde{\varphi} : \tilde{T} \to \mathbb{R}^n$, zwei bijektive Parametrisierungen von $V := \varphi(T) = \tilde{\varphi}(\tilde{T}) \subset M$. Der Kartenwechsel $\tau := \varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi} : \tilde{T} \to T$ sei von der Klasse $C^1$. Dann gilt

$$\int_T f(\varphi(t))\, \sqrt{g(t)}\, d^k t = \int_{\tilde{T}} f(\tilde{\varphi}(t))\, \sqrt{\tilde{g}(t)}\, d^k t\,.$$

**Definition (Integral über Untermannigfaltigkeit)** Seien $M$ und $\varphi_j : T_j \to \mathbb{R}^n$ mit $M \subset \bigcup_j \varphi_j(T_j)$ wie oben. Dann definieren wir das Integral mit einer Teilung der 1: Für offene Mengen $U_j \subset \mathbb{R}^n$ mit $V_j = U_j \cap M = \varphi(T_j)$ sei $\alpha_j$ eine Teilung der 1, insbesondere $\operatorname{supp}(\alpha_j) \subset U_j$. Dann setzen wir

$$\int_M f := \sum_j \int_M f\, \alpha_j\,,$$

wobei die rechte Seite in der letzten Definition eingeführt wurde.

**Lemma (Wohldefiniertheit bezüglich Teilung der** 1**)** Die Definition des Integrals ist unabhängig von der Teilung der 1.

Beispiele: Kurven und Ebenen, Sphären und Halbspären, Graphen, Verhalten bei Streckungen, Zwiebelintegration.

$L^p$-Funktionen auf Mannigfaltigkeiten.

**Satz (Zwiebelintegration)** [Forster, §14, Satz 8] Für integrierbares $f$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = \int_0^\infty \left( \int_{\|x\|=r} f\,dS \right) dr\,.$$

## 13. Der Gaußsche Integralsatz

Vorbereitung: Ist eine Untermannigfaltigkeit als Graph gegeben, $M = \{(\xi,z) \in \mathbb{R}^n \,|\, \xi \in V, z = g(\xi)\}$, so sind alle $\tau_i(\xi,z) = \partial_{\xi_i}(\xi, g(\xi)) = (e_i, \partial_i g)(\xi)$ Tangentialvektoren an $M$. Ein Vektor $\nu$, der senkrecht auf diesen $n-1$ Vektoren steht und Länge 1 hat ist gegeben durch

$$\nu(\xi,z) = \frac{(-\nabla g(\xi), 1)}{\sqrt{1 + \|\nabla g(\xi)\|^2}}\,.$$

Dieser Vektor heißt *Normalenvektor.* Für das Gebiet unterhalb von $g$ ist $\nu$ der *äußere* Normalenvektor, denn er zeigt nach außen: Punkte $x + \varepsilon\nu(x)$ liegen oberhalb von $M$ für kleines $\varepsilon > 0$.

**Lemma 13.1 (Gauß'scher Satz im Zylindergebiet)** [Forster, §15, Lemma vor Satz 3] Sei $V \subset \mathbb{R}^{n-1}$ eine offene Menge, $g : V \to (0,\infty)$ eine Höhenfunktion, und $Z = \{(\xi,z) \in \mathbb{R}^n \,|\, \xi \in V, 0 < z < g(\xi)\}$ das zugehörige Sublevelgebiet im Zylinder $V \times (0,\infty)$. Der obere Rand ist die Untermannigfaltigkeit $M = \{(\xi, g(\xi)) \in \mathbb{R}^n \,|\, \xi \in V\}$. Weiter sei $\nu(\xi,z)$ der äußere Normalenvektor von $Z$ im Punkt $(\xi,z) \in M \subset \partial Z$. Eine Funktion $f$ sei stetig differenzierbar mit kompaktem Träger in $V \times (0,\infty)$, insbesondere verschwindet $f$ "unten und an den Rändern". Dann gilt für alle $i \in \{1,...,n\}$

$$\int_Z \partial_i f = \int_M f\,\nu_i\,dS\,.$$

Notation: Menge mit glattem Rand.

**Satz 13.2 (Gauß'scher Satz)** [Forster, §15, Satz 3] Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge mit glattem Rand, $\nu : \partial A \to \mathbb{R}^n$ das äußere Normalenfeld. Dann gilt für jede stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$\int_A \nabla \cdot f = \int_{\partial A} f \cdot \nu\,dS\,.$$

Bemerkung: Äquivalent zum Gauß'schen Satz ist folgende Aussage für $A$ und $\nu$ wie in 13.2: Für jede stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und jedes $i \in \{1,...,n\}$

$$\int_A \partial_i f = \int_{\partial A} f\,\nu_i\,dS\,.$$

Bemerkung: Partielle Integration mit Randterm: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

$$\int_A (\nabla \cdot f)\,g = -\int_A f\,\nabla g + \int_{\partial A} f \cdot \nu\,g\,.$$