

Erste Klausur zur Analysis 2  
28. Juli 2020

**Aufgabe 1:**

( $8 \times 0,5 + 4 \times 2 = 4 + 8 = 12$  Punkte)

(a) Welche der folgenden Aussagen sind richtig? (ohne Begründung)

- (i) Jede differenzierbare Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  kann stetig auf  $\mathbb{R}^2$  fortgesetzt werden.
- (ii) Jede Lipschitz-stetige Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  kann stetig auf  $\mathbb{R}^2$  fortgesetzt werden.
- (iii) Jede Funktion  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , die auf  $(0, 1)$  differenzierbar ist, nimmt auf  $[0, 1]$  ihr Maximum an.
- (iv) Für jede total differenzierbare Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  und jedes  $v \in \mathbb{R}^n$  ist die Abbildung  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto f(tv)$  differenzierbar.
- (v) Für jede partiell differenzierbare Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  und jedes  $v \in \mathbb{R}^n$  ist die Abbildung  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto f(tv)$  differenzierbar.
- (vi) Für jede stetige Funktion  $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gilt: Für jedes  $x_2 \in \mathbb{R}$  nimmt die Funktion  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto f(t, x_2)$  ihr Maximum an.
- (vii) Für jede stetige Funktion  $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gilt: Für jedes  $x_1 \in [0, 1]$  nimmt die Funktion  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto f(x_1, t)$  ihr Maximum an.
- (viii) Jede stetige Funktion  $f : [0, 1] \cap \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$  nimmt ihr Maximum an.

(b) Geben Sie zu vier der Aussagen aus (a) ein Gegenbeispiel  $f$  an (ohne Beweis).

**Aufgabe 2:**

( $5 + 5 = 10$  Punkte)

Geben Sie (ohne Begründung) für die angegebenen Mengen  $A \subset \mathbb{R}^n$  jeweils

$$\bar{A}, \partial A, \overset{\circ}{A}, A, \bar{A} \setminus A$$

an. Geben Sie außerdem (mit einer kurzen Begründung) an, welche der fünf Mengen für das jeweilige  $A$  kompakt sind.

(a)  $A = [0, 1] \times [0, 2)$

(b)  $A = (\mathbb{Q} \cap [0, 1]) \times [0, 2]$

**Aufgabe 3:**

( $4 + 5 = 9$  Punkte)

Sei  $A = [0, 1]^2$  und  $C^0(A; \mathbb{R})$  der Raum der stetigen Funktionen auf  $A$  mit der Norm

$$\|f\|_{C^0(A)} = \sup_{x \in A} |f(x)|.$$

- (a) Wir betrachten die Funktionen  $f(x) = x_1x_2$  und  $g(x) = (1 - x_1)(1 - x_2)$  auf  $A$ . Berechnen Sie  $\|f - g\|_{C^0(A)}$ .
- (b) Für  $f \in C^0(A; \mathbb{R})$  und  $k \in \mathbb{N}$  sei  $f_k$  definiert durch  $f_k(x) := \frac{1}{k}f(x)$  für  $x \in A$ . Zeigen Sie, dass  $(f_k)_k$  eine Cauchy-Folge in  $C^0(A; \mathbb{R})$  ist.

**Aufgabe 4:**

(6+6=12 Punkte)

- (a) Berechnen Sie für

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} (x_1 + 1) \log(x_2 + 1) \\ x_3 \cos x_2 + x_1 \end{pmatrix}$$

die Jakobimatrix  $Df(0)$ . Nach welchen Koordinaten können Sie die Gleichung  $f = 0$  mit dem Satz über implizite Funktionen lokal um die 0 auflösen? Geben Sie alle Möglichkeiten an.

- (b) Berechnen Sie für

$$g(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} (1 + x_2)x_1 + x_3 + x_3^3 \\ x_2 \\ (1 + x_2)x_1 + x_3 \end{pmatrix}.$$

die Jakobimatrix  $Dg(0)$ . Kann man lokal um  $x = 0$  den Satz über die Umkehrabbildung anwenden? Kann man lokal um  $x = 0$  die Abbildung  $g$  invertieren?

**Aufgabe 5:**

(6+2+2=10 Punkte)

- (a) Berechnen Sie für

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 1) \log(x_2 + 1) \cos(x_3)$$

die Taylorreihe um 0 bis zu Termen zweiter Ordnung (d. h. inklusive quadratischen Termen in  $x$ ).

- (b) Überprüfen Sie, ob die Abbildung

$$\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (s, t) \mapsto \begin{pmatrix} e^t \cos s \\ e^t \sin s \\ t \end{pmatrix}$$

eine Immersion ist (die Jakobimatrix von  $\phi$  also überall maximalen Rang hat). Ist  $\phi(\mathbb{R}^2) =: U$  eine Untermannigfaltigkeit? (ohne Beweis)

(c) Überprüfen Sie, ob die Abbildung

$$\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (s, t) \mapsto \begin{pmatrix} e^t \cos s \\ e^t \sin(2s) \\ t \end{pmatrix}$$

eine Immersion ist. Ist  $\psi(\mathbb{R}^2) =: V$  eine Untermannigfaltigkeit? (ohne Beweis)

**Aufgabe 6:**

(3+2+2+3=10 Punkte)

- (a) Es sei  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, (x, y) \mapsto f(x, y)$ . Formulieren Sie die Bedingung für:  $f$  ist Lipschitz-stetig in  $y$  (so wie im Satz von Picard-Lindelöf gefordert).
- (b) Geben Sie eine Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  an, die differenzierbar ist, aber nicht global Lipschitz-stetig.
- (c) Geben Sie eine Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  an, die global Lipschitz-stetig ist, aber nicht differenzierbar.
- (d) Beweisen Sie, dass jede stetig differenzierbare Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  lokal Lipschitz-stetig ist.

**Aufgabe 7:**

(5+3+3=11 Punkte)

- (a) Formulieren sie den Existenz- und Eindeigkeitssatz von Picard-Lindelöf.
- (b) Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine stetige Funktion. Geben Sie eine zu  $y' = f(y)$  und  $y(0) = c$  äquivalente Integralgleichung an.
- (c) Geben Sie die Fixpunktiteration aus dem Beweis von Picard-Lindelöf an.

**Aufgabe 8:**

(7 Punkte)

Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y' = e^y \sin x, \quad y(0) = 1.$$

**Aufgabe 9:**

(6+6=12 Punkte)

Wir betrachten die Matrix  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ .

- (a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für  $y' = Ay$ .  
(b) Finden Sie die Lösung von

$$y' = Ay + \begin{pmatrix} e^{4x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 10:**

(4+3=7 Punkte)

- (a) Geben Sie ein reelles Fundamentalsystem für die Differentialgleichung

$$y'' = -\omega^2 y - 2\mu y'$$

an. Bedenken Sie dabei alle Fälle  $\omega > 0$  und  $\mu \in \mathbb{R}$ .

- (b) Geben Sie die Lösung von

$$y'' = -\omega^2 y + \sin x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0,$$

für  $\omega \neq 1$  an.