

## Analysis 2

### Blatt 12

Abgabe bis Donnerstag, 16. Juli 2020, 14:00 Uhr

---

**Aufgabe 1 (Periodendauer des math. Pendels).** (1+2+2+2+2+2=11 Punkte)

Wir betrachten die Gleichung  $y'' = -\sin y$  für das mathematische Pendel. Es sei  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Lösung mit  $y'(0) = 0$  und  $y(0) = y_0 \in (0, \pi)$ .

- (a) Geben Sie Formeln für die potentielle Energie  $U(y)$  und die Gesamtenergie  $E$  des Systems an.
- (b) Zeigen Sie, dass  $y(x) \in [-y_0, y_0]$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ .
- (c) Wir definieren  $T := \inf\{x > 0 : y(x) = -y_0\} \in [0, \infty]$ . Zeigen Sie, dass  $y'(x) < 0$  für  $x \in (0, T)$ . Folgern Sie daraus, dass  $\lim_{x \rightarrow T} y(x) = -y_0$ .
- (d) Zeigen Sie, dass  $y$  auf  $(0, T)$  der Differentialgleichung

$$y' = -\sqrt{2(E - U(y))}$$

genügt, und folgern Sie, dass

$$T = \int_{-y_0}^{y_0} \frac{dy}{\sqrt{2(E - U(y))}} \in \mathbb{R}.$$

- (e) Formen Sie den Ausdruck aus (d) unter Benutzung der Formel  $\cos y = 1 - 2\sin^2(y/2)$  und der Substitution  $s = \arcsin(\sin(y/2)/\sin(y_0/2))$  um zu

$$T = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{ds}{\sqrt{1 - \sin^2(y_0/2) \sin^2(s)}}.$$

- (f) Linearisieren Sie die Gleichung um  $y = 0$ . Wie ist die Periodendauer für die linearisierte Gleichung? Wie verhält Sie sich im Vergleich zur Periodendauer der Originalgleichung?

**Aufgabe 2 (Quadratisches Potential).** (3+2=5 Punkte)

Wir betrachten in  $\mathbb{R}^2$  die Differentialgleichung

$$y'' = -Ay, \quad A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

mit  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ .

- (a) Geben Sie die allgemeine Lösung an. Überzeugen Sie sich, dass die Lösungen im Fall  $\lambda_1 = \lambda_2$  (möglicherweise entartete) Ellipsen durchlaufen.

- (b) Unter welcher Voraussetzung an  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  ergeben sich nichtperiodische Lösungen? Wie bestimmt sich andernfalls die Periodendauer?

**Aufgabe 3.**

(4 Punkte)

Bestimmen Sie ein Lösungs-Fundamentalsystem der Differentialgleichung

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{1}{4x^2}\right)y = 0, \quad y : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

mithilfe des Ansatzes  $z = \sqrt{xy}$ .