Prof. Dr. B. Schweizer
Klaas Poelstra, M. Sc.

Technische Universität Dortmund
Sommersemester 2020

Analysis 2

Blatt 11

Abgabe bis Dienstag, 7. Juli 2020, 14:00 Uhr

Aufgabe 1. *(5 Punkte)*

Bestimmen Sie alle Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$\begin{cases} y_1' = y_2 + 1\,, \\ y_2' = y_1 + \sin x\,. \end{cases}$$

Aufgabe 2. *(5 Punkte)*

Sei $\lambda > 0$. Bestimmen Sie alle Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$y' = \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix}\,.$$

Rechnen Sie einmal reell und einmal komplex (wie in Video 11.4).

Aufgabe 3. *(2+2+2=6 Punkte)*

Bestimmen Sie jeweils ein Fundamentalsystem von Lösungen der Gleichung $y' = Ay$.

(a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\omega \\ 0 & \lambda & 0 \\ \omega & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & -\omega & 0 \\ \omega & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ (c) $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & -\omega_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_2 \\ \omega_1 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & \omega_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*

Sei $I := (-r, r)$ für ein $r > 0$. Weiter seien $a, b : I \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen. Die Funktion a sei ungerade und b gerade, d. h.

$$a(-x) = -a(x)\,, \qquad b(-x) = b(x)$$

für alle $x \in I$. Zeigen Sie: Die Differentialgleichung

$$y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0$$

bezitzt ein Fundamentalsystem von Lösungen, das aus einer geraden und einer ungeraden Funktion besteht.