

## Analysis 2

### Blatt 10

Abgabe bis Dienstag, 30. Juni 2020, 14:00 Uhr

---

#### Aufgabe 1 (Eindeutigkeit).

(5 Punkte)

Sei  $\alpha \in (0, 1)$ . Zeigen Sie, dass für die Differentialgleichung

$$y' = |y|^\alpha$$

der Eindeutigkeitssatz nicht gilt und bestimmen Sie alle Lösungen  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  der Differentialgleichung mit der Anfangsbedingung  $\phi(0) = 0$ .

#### Aufgabe 2.

(5 Punkte)

Bestimmen Sie die Lösung  $y = (y_1, y_2)$  des Differentialgleichungssystems

$$y_1' = -y_2, \quad y_2' = y_1$$

mit der Anfangsbedingung  $y(0) = (1, 0)$ . Zeigen Sie zunächst, dass die rechte Seite eine Lipschitz-Bedingung erfüllt und berechnen Sie dann die Lösungen mithilfe des Iterationsverfahrens von Picard-Lindelöf.

#### Aufgabe 3 (Das mathematische Pendel).

(2+3+5=10 Punkte)

Ein Punkt der Masse  $m$  sei an einem Faden der Länge  $L$  aufgehängt. Mit  $x(t)$  bezeichnen wir den Winkel der Auslenkung des Pendels zum Zeitpunkt  $t$ . Diese Auslenkung  $x$  kann mit der Differentialgleichung  $L\ddot{x} = -g \sin x$  beschrieben werden, wobei  $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$ . Wir vernachlässigen die Konstanten und nehmen an, dass  $\ddot{x} + \sin x = 0$ .

- Schreiben Sie diese Differentialgleichung zweiter Ordnung als ein System erster Ordnung für  $(x, y)$  mit  $y := \dot{x}$ .
- Zeigen Sie, dass  $H(x, y) := \frac{1}{2}y^2 - \cos x$  entlang von Lösungen konstant ist.
- Zeichnen Sie in ein  $(x, y)$ -Koordinatensystem ein Bild der Niveaulinien von  $H$ . Versuchen Sie, in diesem Bild die verschiedenartigen Lösungen der Differentialgleichung zu identifizieren und beschreiben Sie diese. Für wie „realistisch“ halten Sie die einzelnen Lösungsarten?  
*Tipp:* Es gibt 5 verschiedene Arten von Lösungen.

Weite Informationen zum mathematischen Pendel finden Sie in §14 des Lehrbuchs von O. Forster.