Prof. Dr. B. Schweizer
Klaas Poelstra, M. Sc.

Technische Universität Dortmund
Sommersemester 2020

Analysis 2

Blatt 8

Abgabe bis Dienstag, 16. Juni 2020, 14:00 Uhr

Aufgabe 1 (Die orthogonalen Matrizen als Untermannigfaltigkeit). *(5 Punkte)*

Die Menge $\mathbb{R}^{n\times n}$ aller reellen $n\times n$-Matrizen $X = (x_{ij})_{i,j=1}^n$ werde mit dem $\mathbb{R}^{n^2}$ mit Koordinaten $x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{nn}$ identifiziert. Zeigen Sie: Die Menge

$$O(n) \coloneqq \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \ : \ A^T A = I\}$$

der *orthogonalen* $n\times n$-Matrizen ist eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n\times n}$ der Dimension $\frac{n(n-1)}{2}$. Ist $O(n)$ zusammenhängend?

Aufgabe 2 (Minimierung unter Nebenbedingungen). *(5 Punkte)*

Bestimmen Sie den Abstand des Punktes $(1, -1, 0)$ vom Rotationshyperboloid

$$H \coloneqq \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 - z^2 = 1\},$$

d. h. $\inf_{(x,y,z)\in H} d((x, y, z), (1, -1, 0))$.

Aufgabe 3 (Parameterabhängige Integrale). *(2+2+2=6 Punkte)*

(a) Es sei $f : [0, 1]^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) \coloneqq \begin{cases} \frac{y}{x^2} e^{-\frac{y}{x}}, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{sonst}. \end{cases}$$

Ist die Funktion $F(x) \coloneqq \int_0^1 f(x, y)\,\mathrm{d}y$ stetig auf $[0, 1]$? Warum ergibt sich kein Widerspruch zum Satz über die stetige Abhängigkeit vom Parameter des Integrals?

(b) Es sei $f : (-1, 1) \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) \coloneqq \begin{cases} \frac{x^3}{y^2} e^{-\frac{x^2}{y}}, & \text{falls } y > 0, \\ 0, & \text{falls } y = 0. \end{cases}$$

Ist die Funktion $F(x) \coloneqq \int_0^1 f(x, y)\,\mathrm{d}y$ differenzierbar in $x = 0$? Ist die Reihenfolge von Integration und Differentiation vertauschbar? Warum ergibt sich kein Widerspruch zum Satz über die Vertauschbarkeit von Integration und Differentiation?

(c) Es sei $f : (0, 1] \times (0, 1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) \coloneqq \frac{x - y}{(x + y)^3}.$$

Stimmen die (uneigentlichen) Integrale

$$C_1 \coloneqq \int_0^1 \int_0^1 f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad \text{und} \quad C_2 \coloneqq \int_0^1 \int_0^1 f(x, y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

überein? Warum ergibt sich kein Widerspruch zum Satz über Doppelintegrale?

Aufgabe 4 (Berechnung eines Integrals). *(4 Punkte)*

Zeigen Sie, dass
$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\,.$$
Betrachten Sie dazu das Integral $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-tx} \,\mathrm{d}x$ für $t \in \mathbb{R}$ und verwenden Sie, dass die Funktion $F(t) = \arctan(t)$ eine Stammfunktion von $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$ ist.