Prof. Dr. B. Schweizer
Klaas Poelstra, M. Sc.

Technische Universität Dortmund
Sommersemester 2020

Analysis 2

Blatt 7

Abgabe bis Dienstag, 9. Juni 2020, 14:00 Uhr

Aufgabe 1 (Implizite Funktionen). *(2+3=5 Punkte)*

(a) Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$\cos(xy) - e^{x-y} + 2e^z = 0$$

in einer Umgebung des Punktes $(\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}, 0)$ in der Form $z = g(x, y)$ eindeutig aufgelöst werden kann.

(b) Bestimmen Sie die Richtungsableitung von g an der Stelle $(\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi})$ in Richtung des Vektors $v = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

Aufgabe 2 (Umkehrabbildung). *(1+2+2=5 Punkte)*

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei definiert durch

$$f(x, y) = (e^{\sin x} - \cos x\,,\ \cos(x + y))\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass f nicht injektiv auf $\mathbb{R}^2$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass es eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^2$ von $(\frac{\pi}{2}, 0)$ gibt, so dass f auf U injektiv und $V := f(U)$ offen ist.

(c) Berechnen Sie für $f^{-1} : V \to U$ die Ableitung an der Stelle $(e, 0)$.

Aufgabe 3 (Ein eindimensionales Beispiel). *(2+3=5 Punkte)*

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0\,, \\ 0 & \text{für } x = 0\,. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass f differenzierbar ist und f' auf dem Intervall $(-1, 1)$ beschränkt ist.

(b) Zeigen Sie, dass f in keiner Umgebung von 0 injektiv ist. Warum ist dies kein Widerspruch zum Satz über die Umkehrabbildung?

Aufgabe 4 (Taylorentwicklung einer impliziten Funktion). *(5 Punkte)*

Durch die Gleichung

$$x^4 + x^2 y + y^4 = 1$$

wird in einer Umgebung des Punktes $(1, 0)$ implizit eine Funktion $y = f(x)$ definiert. Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiter Ordnung an der Entwicklungsstelle $x = 1$ für diese Funktion f.