Prof. Dr. B. Schweizer
Klaas Poelstra, M. Sc.

Technische Universität Dortmund
Sommersemester 2020

Analysis 2

Blatt 4

Abgabe bis Montag, 18. Mai 2020, 14:00 Uhr

Aufgabe 1 (Rektifizierbarkeit). *(3+3=6 Punkte)*

(a) Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine rektifizierbare Kurve der Länge L. Zeigen Sie: Für $k \in \mathbb{N}$ und $a \le t_0 < t_1 < \cdots < t_k \le b$ gilt:

$$p_f(t_0, \dots, t_k) := \sum_{i=1}^{k} \|f(t_i) - f(t_{i-1})\| \le L.$$

(b) Skizzieren Sie die Kurve $f : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, die definiert ist durch

$$f(t) := \begin{cases} (t, t\cos(\pi/t))\,, & \text{falls } t \neq 0\,, \\ (0,0)\,, & \text{falls } t = 0\,. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f stetig, aber nicht rektifizierbar ist.

Aufgabe 2 (Parametrisierung nach Bogenlänge). *(5 Punkte)*

Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre Kurve der Länge L. Zeigen Sie: Es existiert eine Parametertransformation

$$\phi : [0, L] \to [a, b]\,,$$

so dass die Kurve $g := f \circ \phi$ nach Bogenlänge parametrisiert ist. Die Kurve g heißt *nach Bogenlänge parametrisiert*, falls $\|g'(t)\| = 1$ für alle $t \in [0, L]$.

Tipp: Untersuchen Sie die Eigenschaften der Funktion

$$\psi : [a, b] \to [0, L]\,, \qquad \psi(t) := \int_a^t \|f'(s)\|\,\mathrm{d}s\,.$$

Aufgabe 3 (Rotation). *(4 Punkte)*

Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen und $u = (u_1, u_2, u_3) \colon U \to \mathbb{R}^3$ ein zweimal partiell stetig differenzierbarens Vektorfeld. Zeigen Sie, dass

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} u) = \nabla(\operatorname{div} u) - \Delta u\,,$$

wobei $\Delta u := (\Delta u_1, \Delta u_2, \Delta u_3)$.

Aufgabe 4 (Gleichmäßige Stetigkeit). *(5 Punkte)*

Sei $f : (a, b) \times (a, b) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar mit beschränkten partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$. Zeigen Sie, dass f gleichmäßig stetig ist auf $(a, b) \times (a, b)$.