

Analysis 2

Blatt 2

Abgabe bis Montag, 4. Mai 2020, 14:00 Uhr

Aufgabe 1 (Vollständigkeit abgeschlossener Teilräume).

(4 Punkte)

Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum, und sei $Y \subset X$ eine Teilmenge. Zeigen Sie, dass Y mit der induzierten Metrik genau dann vollständig ist, wenn Y eine abgeschlossene Teilmenge von X ist.

Aufgabe 2 (Charakterisierung von Stetigkeit).

(2+4+2=8 Punkte)

Seien X, Y topologische Räume, und sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung.

- (a) Zeigen Sie: f ist genau dann stetig, wenn für jede abgeschlossene Teilmenge $V \subset Y$ auch $f^{-1}(V) \subset X$ abgeschlossen ist.
- (b) Zeigen Sie: f ist genau dann stetig, wenn für jede Teilmenge $U \subset X$ die Inklusion $f(\overline{U}) \subset \overline{f(U)}$ gilt.
- (c) Zeigen Sie mit einem Beispiel, dass auch für ein stetiges f im Allgemeinen nicht $f(\overline{U}) = \overline{f(U)}$ gilt.

Aufgabe 3 (Vollständigkeit eines Funktionenraums).

(4 Punkte)

Es sei $\mathcal{C}[a, b]$ der Vektorraum aller stetigen Funktionen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ auf dem kompakten Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ mit der Supremumsnorm

$$\|f\| := \sup\{|f(x)| : x \in [a, b]\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{C}[a, b]$ vollständig ist.

Tipp: Verwenden Sie die Vollständigkeit von \mathbb{R} und die Tatsache, dass gleichmäßige Limiten stetiger Funktionen wieder stetig sind.

Aufgabe 4 (Zusammenhang).

(2+2=2 Punkte)

Ein topologischer Raum X heißt *zusammenhängend*, wenn die einzigen Teilmengen von X , die sowohl offen als auch abgeschlossen sind, der ganze Raum X und die leere Menge \emptyset sind.

- (a) Geben Sie eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ an, die als topologischer Raum mit der von \mathbb{R} induzierten Topologie nicht zusammenhängend ist. Geben sie alle Teilmengen von A an, die (in A) sowohl offen als auch abgeschlossen sind.
- (b) Sei $f : X \rightarrow Y$ eine stetige und surjektive Abbildung zwischen topologischen Räumen. Zeigen Sie: Wenn X zusammenhängend ist, dann ist auch Y zusammenhängend.