Prof. Dr. B. Schweizer
Klaas Poelstra, M. Sc.

Technische Universität Dortmund
Sommersemester 2020

Analysis 2

Blatt 1

Abgabe bis Montag, 27. April 2020, 14:00 Uhr

Aufgabe 1 (Metrische Räume). *(3+3=6 Punkte)*

(a) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\delta : X \times X \to \mathbb{R}\,, \qquad \delta(x, y) := \min(d(x, y), 1)$$

eine Metrik auf X ist und dass die Metriken d und δ dieselben offenen Mengen auf X definieren.

(b) Sei X eine beliebige Menge. Durch

$$d(x, y) := \begin{cases} 0\,, & \text{falls } x = y\,, \\ 1\,, & \text{falls } x \neq y\,, \end{cases}$$

wird die triviale Metrik auf X definiert. Zeigen Sie, dass jede Teilmenge von X bzgl. dieser Metrik zugleich offen und abgeschlossen ist.

Aufgabe 2 (Metrik der französischen Eisenbahn). *(3+2=5 Punkte)*

(a) Zeigen Sie, dass im Raum $\mathbb{R}^n$ durch

$$d(x, y) := \begin{cases} |x - y|\,, & \text{falls ein } \alpha > 0 \text{ existiert mit } x = \alpha y\,, \\ |x| + |y|\,, & \text{sonst,} \end{cases}$$

eine Metrik definiert wird. Hierbei bezeichnet $|\cdot|$ die euklidische Norm im $\mathbb{R}^n$.

(b) Gib es eine Norm $\|\cdot\|$, so dass $d(x, y) = \|x - y\|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$?

Aufgabe 3 (Inneres, Abschluss und Rand). *(3+3=6 Punkte)*

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $A \subset X$. Zeigen Sie:

(a) Das Innere von A ist

$$\mathring{A} = \bigcup \{U \,:\, U \subset A \text{ und } U \text{ offen}\}\,.$$

Außerdem ist A genau dann offen, wenn $A \cap \partial A = \emptyset$.

(b) Die abgeschlossene Hülle von A (kurz: der Abschluss von A) ist

$$\overline{A} = \bigcap \{U \,:\, U \supset A \text{ und } U \text{ abgeschlossen}\}\,.$$

Außerdem ist A genau dann abgeschlossen, wenn $\partial A \subset A$.

Aufgabe 4 (Das Trennungsaxiom T_1). *(3 Punkte)*

Zeigen Sie: Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ ist genau dann ein T_1-Raum, wenn für jedes $x \in X$ die einpunktige Menge $\{x\}$ abgeschlossen ist.

Geben Sie ein Beispiel für einen topologischen Raum an, der das Trennungsaxiom T_1 *nicht* erfüllt.

Erinnerung: Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ erfüllt per Definition genau dann das Trennungsaxiom T_1 (ist also ein T_1-Raum), wenn zu je zwei Punkten $x \neq y$ in X eine Umgebung U von x existiert mit $y \notin U$.