Testat 2 Version A

Name:	Vorname:
Übungsgruppe:	Matrikelnr.:

Lösung zu Aufgabe 1:

Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge, und $a \in \mathbb{R}$.

$$a_k \to a \quad :\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \; \exists K \in \mathbb{N} \; \forall k \geq K : \; |a_k - a| < \varepsilon$$

Lösung zu Aufgabe 2:

Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ $(D \subset \mathbb{R})$ heißt stetig, falls für alle konvergenten Folgen $a_k \to a$ mit $a_k \in D \; \forall k$ und $a \in D$ gilt: $f(a_k) \to f(a)$

Lösung zu Aufgabe 3:

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta := \frac{\varepsilon}{3}$. Für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-1| < \delta$ gilt:

$$|f(x) - f(1)| = |3x-3| = 3|x-1| < 3\delta = \varepsilon.$$

Also ist f in $x=1$ stetig.

Lösung zu Aufgabe 4:

1) $A := (0,1]$, $a_k := \frac{1}{k}$

2) $b_k = k$

3) $c_k := \begin{cases} \frac{2}{k} & k \text{ gerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

4) $d_k := \frac{1}{k^2}$

Lösung zu Aufgabe 5:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} 2^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad \text{für } a_k := \frac{2^k}{k!}.$$

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{2^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{2^k} = \frac{2}{k+1} \longrightarrow 0 \quad (k \to \infty)$$

$$\Longrightarrow \exists K \in \mathbb{N} \ \forall k \geq K : \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < \frac{1}{2}$$

Also konv. die Reihe nach dem Quotientenkriterium.

Lösung zu Aufgabe 6:

1) $e^x = \sum_{k \geq 0} \underbrace{\frac{x^k}{k!}}_{>0 \text{ für } x>0} > \frac{x^0}{0!} = 1$ für $x > 0$

2) $e^y = e^{x+(y-x)} = \underbrace{e^x}_{>0} \underbrace{e^{y-x}}_{>1 \text{ nach 1)}} > e^x$ für $y > x$

3) $e^{\log(ab)} = ab = e^{\log a} e^{\log b} = e^{\log a + \log b}$

$\overset{2)}{\Longrightarrow} \log(ab) = \log a + \log b$

Anzahl Zusatzblätter:

Testat 2 Version B

Name:	Vorname:
Übungsgruppe:	Matrikelnr.:

Lösung zu Aufgabe 1: s. Version A

Lösung zu Aufgabe 2:

Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ $(D \subset \mathbb{R})$ heißt stetig, falls gilt:

$$\forall x \in D, \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 :$$
$$\forall x' \in D : |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

Lösung zu Aufgabe 3:

Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $x_n \in (0, \infty)$ $\forall n$ und $x_n \to 1$ für $n \to \infty$. Nach den Rechenregeln für Grenzwerte gilt $x_n^3 + \frac{1}{x_n} \to 1^3 + \frac{1}{1}$, also $f(x_n) \to f(1)$.

Also ist f stetig in 1.

Lösung zu Aufgabe 4:

1) $(a_k)_k := (1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, \dots)$

(oder: $a_k := \sin(k)$, oder: a_k so, dass $\mathbb{Q} = \{a_k \mid k \in \mathbb{N}\}$, oder ...)

2) $b_k := \max\{\frac{n}{k} \mid n \in \mathbb{N}, \frac{n}{k} < \sqrt{2}\}$

3) $c_k := (-1)^k \frac{1}{k}$

4) $d_k := 1$

Lösung zu Aufgabe 5:

wie Version A

Lösung zu Aufgabe 6:

1) $\underline{x > 0}$: $e^x > 1 > 0$ ✓

$\underline{x = 0}$: $e^x = 1 > 0$ ✓

$\underline{x < 0}$: $1 = e^0 = e^{x-x} = e^x e^{-x}$

$\Rightarrow e^x = \frac{1}{e^{-x}} > 0$, da $e^{-x} > 0$

2) wie Version A

3) wie Version A

Anzahl Zusatzblätter: