Testat 1, Version A (gerade Matrikelnummer)

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*

Formen Sie den logischen Ausdruck $(A \implies B) \implies C$ in einen äquivalenten Ausdruck ohne Implikationspfeile um.

Aufgabe 2. *(6 Punkte)*

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion für jedes $n \in \mathbb{N}$: $\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = n^2 + 2n + 1$.

Aufgabe 3. *(5 Punkte)*

Geben Sie die Definition der Konvergenz einer reellen Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ an.

Aufgabe 4. *(6 Punkte)*

Seien $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ reelle Folgen und $b \in \mathbb{R}$ mit $a_k \to -\infty$ und $b_k \to b$ für $k \to \infty$.
Zeigen Sie: $a_k + b_k \to -\infty$ für $k \to \infty$.

Aufgabe 5. *(6 Punkte)*

Sei $A \subset \mathbb{R}$ nichtleer und beschränkt. Zeigen Sie: Es gibt eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $x_k \in A$ für alle $k \in \mathbb{N}$, die gegen $\sup A$ konvergiert.

Aufgabe 6. *(6 Punkte)*

Geben Sie (ohne Beweis) reelle Folgen $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ an, für die gilt:

1) $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt, aber nicht konvergent.
2) $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist unbeschränkt, nicht bestimmt divergent, und es gilt $b_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$.
3) $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist konvergent und der Grenzwert ist irrational.

Testat 1, Version B (ungerade Matrikelnummer)

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*
Formen Sie den logischen Ausdruck $A \implies (B \implies C)$ in einen äquivalenten Ausdruck ohne Implikationspfeile um.

Aufgabe 2. *(6 Punkte)*
Beweisen Sie mit vollständiger Induktion für jedes $n \in \mathbb{N}$: $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$.

Aufgabe 3. *(5 Punkte)*
Geben Sie die Definition der Konvergenz einer reellen Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ an.

Aufgabe 4. *(6 Punkte)*
Seien $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ reelle Folgen mit $a_k \to +\infty$ und $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt.
Zeigen Sie: $a_k + b_k \to +\infty$ für $k \to \infty$.

Aufgabe 5. *(6 Punkte)*
Sei $A \subset \mathbb{R}$ nicht nach oben beschränkt. Zeigen Sie: Es gibt eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $x_k \in A$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $x_k \to +\infty$ für $k \to \infty$.

Aufgabe 6. *(6 Punkte)*
Geben Sie (ohne Beweis) reelle Folgen $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ an, für die gilt:

1) $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist konvergent, aber nicht monoton.
2) $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist monoton, aber nicht konvergent.
3) $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist nicht bestimmt divergent, aber $(|c_k|)_{k\in\mathbb{N}}$ ist bestimmt divergent.