Prof. Dr. B. Schweizer | TU Dortmund
Klaas Poelstra, M. Sc. | Wintersemester 2019/20

Analysis I, Klausur 1
6. Februar 2020

Aufgabe 1. *(4+4=8 Punkte)*

Beweisen Sie:

(a) Jede konvergente Folge ist beschränkt.

(b) Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folgen mit $x_n \to x$ und $y_n \to y$ für $n \to \infty$. Dann gilt $x_n y_n \to xy$ für $n \to \infty$.

Aufgabe 2. *(5+2+2=9 Punkte)*

Sei $f : [a,b] \to [a,b]$ monoton wachsend und stetig. Für ein vorgegebenes $x_0 \in [a,b]$ sei die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv definiert durch $x_n = f(x_{n-1})$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

(a) Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton. (*Hinweis:* Fallunterscheidung)

(b) Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen ein $x \in [a,b]$.

(c) Es gilt $f(x) = x$.

Aufgabe 3. *(4+(3+3+3)=13 Punkte)*

(a) Untersuchen Sie für $q > 0$ die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $a_k := \frac{q^k - k}{q^k + k}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. den Grenzwert.

(b) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

$$\text{(i)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + \log n}\,, \qquad \text{(ii)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 + \frac{\sin n}{n}}{n}(-1)^n \qquad \text{(iii)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(n+2)!3^n}{(2n)!}$$

Aufgabe 4. *(3+3+3=9 Punkte)*

Geben Sie jeweils (ohne Beweis) ein Beispiel an für

(a) eine surjektive Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$.

(b) eine beschränkte Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ohne Maximum.

(c) eine unbeschränkte Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit Maximum.

Aufgabe 5. *(10 Punkte)*

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Wir definieren $m := \min_{x\in[a,b]} f(x)$ und $M := \max_{x\in[a,b]} f(x)$.
Zeigen Sie: $f([a,b]) = [m, M]$.

Aufgabe 6. *(10 Punkte)*

Gegeben sei die Funktion

$$f : (0,\infty) \to \mathbb{R}\,, \qquad f(x) = \sqrt{x}\log(1/x)\,.$$

Untersuchen Sie f auf lokale Extrema und bestimmen Sie $\sup\limits_{x\in(0,\infty)} f(x)$ und $\inf\limits_{x\in(0,\infty)} f(x)$.

Aufgabe 7. *(5+5=10 Punkte)*

(a) Formulieren Sie den Mittelwertsatz der Differentialrechnung (Mittelwertsatz I).

(b) Beweisen Sie $|\tan x - \tan y| \geq |x - y|$ für $x, y \in (-\pi/2, \pi/2)$.

Aufgabe 8. *(10 Punkte)*

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, und seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit

$$f'(a) < 0\,, \quad f'(b) > 0\,, \quad a < b\,.$$

Zeigen Sie: Es existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = 0$.

Warnung: Sie dürfen nicht annehmen, dass f *stetig* differenzierbar ist.

Aufgabe 9. *(3+3+3=9 Punkte)*

(a) Welches Integral hat den größeren Wert: $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{10}(x)\,\mathrm{d}x$ oder $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^2(x)\,\mathrm{d}x$?

(b) Bestimmen Sie die Taylorreihe $T_0^f(x)$ der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := (x - 20)^2 - 20x$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

(c) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f. Seien außerdem $\alpha, \beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen. Zeigen Sie:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(s)\,\mathrm{d}s = f(\beta(x))\beta'(x) - f(\alpha(x))\alpha'(x)\,.$$

Aufgabe 10. *(4+4+4=12 Punkte)*

(a) Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f(x) = \sin\sqrt{x}$ $(x > 0)$.
Tipp: Substitution und partielle Integration.

(b) Berechnen Sie das Integral $A := \displaystyle\int_0^{\pi} e^x \cos x\,\mathrm{d}x$.
Tipp: Zweifache partielle Integration liefert eine Gleichung für A.

(c) Untersuchen Sie das uneigentliche Integral

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x(\log x)^{\alpha}}\,\mathrm{d}x \quad (\alpha > 1)$$

auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. seinen Wert.