Prof. Dr. B. Schweizer
Klaas Poelstra, M. Sc.

Technische Universität Dortmund
Wintersemester 2019/20

Analysis I

Blatt 13

Abgabe bis Montag, 27. Januar 2020, 14:00 Uhr

Aufgabe 1 (Unter und Obersummen). *(5 Punkte)*

Berechnen Sie das Integral $\int_0^a x^2 \mathrm{d}x$ für beliebiges $a > 0$.

Verwenden Sie dazu die äquidistante Zerlegung $x_k = kh$, $k = 0, \dots, n$, des Intervalls $[0, a]$ der Feinheit $h = \frac{a}{n}$ mit den zugehörigen Unter- und Obersummen

$$s_n = h \sum_{k=0}^{n-1} (kh)^2 , \qquad S_n = h \sum_{k=1}^{n} (kh)^2 .$$

Aufgabe 2 (Berechnung von Integralen). *(2+2+2=6 Punkte)*

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int_1^3 \frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)} \mathrm{d}x$ (*Tipp:* Partialbruchzerlegung)

(b) $\displaystyle\int \frac{e^{3x}+3}{e^x+1} \mathrm{d}x$ (*Tipp:* Substitution)

(c) $\displaystyle\int_1^e x^{10} \log x \mathrm{d}x$ (*Tipp:* Partielle Integration)

Aufgabe 3 (Integral als Funktion der oberen Grenze). *(4 Punkte)*

Sei f über $I = [a, b]$ integrierbar, $a \le c \le b$, und

$$F(x) := \int_c^x f(t) \mathrm{d}t .$$

Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) Die Funktion F ist in I *Lipschitzstetig*, d. h. es gibt ein $K \in \mathbb{R}$, sodass

$$|F(x) - F(x')| \le K|x - x'| \quad \text{für alle } x, x' \in I.$$

(b) Ist $f \ge 0$ in I, so ist F monoton wachsend.

Aufgabe 4 (Flächeninhalt). *(5 Punkte)*

Berechnen Sie den Wert des Riemann-Integrals

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Machen Sie sich klar (kein Aufschrieb erforderlich), dass dies der Flächeninhalt des Einheits-Halbkreises in der Ebene ist.

Anleitung: Verwenden Sie die Substitution $x = \sin t$ und die Identität $\cos^2 t = \frac{1}{2}(1 + \cos 2t)$ des Additionstheorems.