Prof. Dr. B. Schweizer
Klaas Poelstra, M. Sc.

Technische Universität Dortmund
Wintersemester 2019/20

Analysis I

Blatt 12

Abgabe bis Montag, 20. Januar 2020, 14:00 Uhr

Aufgabe 1 (Taylorreihen). *(2+2+2=6 Punkte)*

Berechnen Sie für die folgenden Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ die Taylorreihe in $x_0 \in \mathbb{R}$:

(i) $f : x \mapsto \sin x,\ D = \mathbb{R},\ x_0 = 0.$

(ii) $f : x \mapsto \sin x,\ D = \mathbb{R},\ x_0 = \frac{\pi}{2}.$

(iii) $f : x \mapsto \frac{1}{1+x},\ D = (-1, \infty),\ x_0 = 0.$

Aufgabe 2 (Anwendung der Regel von l'Hospital). *(4 Punkte)*

Für einen Parameter $0 < a < 1$ sei die Funktion $F_a : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch $F_a(x) := \left(2 - a^{\frac{1}{x}}\right)^x$. Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{x\to\infty} F_a(x)$.

Hinweis: Verwenden Sie die Substitution $t := \frac{1}{x}$ und die Funktion $G_a(t) := \log F_a\left(\frac{1}{t}\right)$.

Aufgabe 3 (Existenz von Lösungen). *(2+2+2=6 Punkte)*

Zeigen Sie für eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

(i) Zwischen zwei Nullstellen von f liegt eine Nullstelle von f'.

(ii) Ist f eine n-mal differenzierbare Funktion, und hat $f^{(n)}$ höchstens k Nullstellen, so hat f höchstens $k + n$ Nullstellen.

(iii) Die Gleichung $2^x = 1 + x^2$ hat genau drei Lösungen.

Aufgabe 4 (Verallgemeinerter Mittelwertsatz). *(4 Punkte)*

Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, die auf (a, b) differenzierbar sind. Es gelte $g'(x) \neq 0$ für $x \in (a, b)$. Zeigen Sie: Es gibt ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\,.$$