Prof. Dr. B. Schweizer
Klaas Poelstra, M. Sc.

Technische Universität Dortmund
Wintersemester 2019/20

Analysis I

Blatt 11

Abgabe bis Montag, 13. Januar 2020, 14:00 Uhr

Aufgabe 1 (Lokale und globale Maxima). *(3+1=4 Punkte)*

Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die Funktion $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n e^{-x}$.

(i) Zeigen Sie, dass f_n genau ein lokales Maximum besitzt und dieses an der Stelle $x_0 = n$ liegt.

(ii) Ist dieses lokale Maximum ein globales Maximum?

Aufgabe 2 (Ableitungen). *(4 Punkte)*

Sei $a > 0$ eine Konstante. Berechnen Sie für die folgenden Funktionen jeweils die erste Ableitung:

(i) $f : (1, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \log(\log x)$

(ii) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^{(x^x)}$

(iii) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto a^{(x^x)}$

(iv) $f : (1, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto a^{\sqrt{\log x}}$

Aufgabe 3 (Differenzierbarkeit). *(2+2=4 Punkte)*

Zeigen Sie, dass die Funktionen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar sind und berechnen Sie die Ableitung:

(i) $g : x \mapsto \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0\,, \end{cases}$

(ii) $h : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x^2} \exp\left(-\frac{1}{x}\right) & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0\,, \end{cases}$

Aufgabe 4 (Rechenregel für höhere Ableitungen). *(3+2=5 Punkte)*

(i) Sei $D \subset \mathbb{R}$ und seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ zwei n-mal differenzierbare Funktionen. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion die Ableitungsregel

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(f(x)g(x)\right) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x)\,,$$

wobei mit $f^{(m)} := \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m} f$ die m-te Ableitung von f bezeichnet wird.

(ii) Berechnen Sie die hundertste Ableitung der Funktion $f(x) = x^2 \cos(2x)$ in $x_0 = 0$.

Aufgabe 5 (Charakterisierung konvexer Funktionen). *(3 Punkte)*

Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $x_0 \in (a, b)$. Zeigen Sie: Falls f konvex ist, so gilt die Ungleichung

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{für alle } x \in (a, b)\,.$$

Hinweis: Betrachten Sie dazu die Funktion $g(t) := f(tx + (1 - t)x_0)$ für $t \in [0, 1]$.