

# Analysis I

## Blatt 10

Abgabe bis Montag, 6. Januar 2020, 14:00 Uhr

---

**Aufgabe 1 (Ableitung von Produkten).** (4 Punkte)

Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall und  $a \in I$ . Seien  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  Funktionen mit folgenden Eigenschaften:

(i)  $f$  ist differenzierbar in  $a$  und  $f(a) = 0$ ,

(ii)  $g$  ist stetig in  $a$ .

Zeigen Sie, dass das Produkt  $f \cdot g : I \rightarrow \mathbb{R}$  in  $a$  differenzierbar ist mit  $(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a)$ .

**Aufgabe 2 (Ableitung gerader und ungerader Funktionen).** (2 Punkte)

Eine Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *gerade*, falls  $f(-x) = f(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ , und *ungerade*, falls  $f(-x) = -f(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Zeigen Sie:

Die Ableitung einer differenzierbaren geraden Funktion ist ungerade.

**Aufgabe 3 (Die Ableitung der Wurzelfunktion).** (2 Punkte)

Zeigen Sie unter Verwendung der abstrakten Sätze aus der Vorlesung:

$$\frac{d}{dy} (y^2) = 2y \quad \text{und} \quad \frac{d}{dx} \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

**Aufgabe 4 (Ableitungen).** (2+2+2+2=8 Punkte)

Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , wobei  $a \in \mathbb{R}$  eine positive Konstante ist:

- |                               |  |
|-------------------------------|--|
| (i) $f : x \mapsto x^x$       | (ii) $f : x \mapsto \log(x\sqrt{x^x})$ |
| (iii) $f : x \mapsto (x^x)^x$ | (iv) $f : x \mapsto x^{(a^x)}$         |

**Aufgabe 5 (Stetigkeit und Differenzierbarkeit).** *(2+2=4 Punkte)*

Seien  $f, g : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  stetig mit  $f(x) \cdot g(x) = x$  für alle  $x \in (-1, 1)$ . Zeigen Sie:

- (i) Sind  $f$  und  $g$  differenzierbar, so gilt:  $f(0) = 0 \implies g(0) \neq 0$ .
- (ii) Ohne die Differenzierbarkeitsvoraussetzung ist der Schluss in (i) falsch.