

# Analysis I

## Blatt 9

Abgabe bis Montag, 16. Dezember 2019, 14:00 Uhr

---

### Aufgabe 1 (Grenzwerte).

(4 Punkte)

Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \lim_{x \searrow 0} \sqrt{x} \log(x), & \text{(b)} \lim_{x \searrow 0} x^x, \\ \text{(c)} \lim_{x \nearrow 0} (1-x) \log(1-x^3), & \text{(d)} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}. \end{array}$$

### Aufgabe 2 (Stetigkeit).

(3 Punkte)

Untersuchen Sie, ob folgende Funktionen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig sind:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0, \\ x \sin \frac{1}{x} & \text{sonst.} \end{cases} & \text{(b)} f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0, \\ \sin \frac{1}{x} & \text{sonst.} \end{cases} \\ \text{(c)} f(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \leq 0, \\ \cos\left(\frac{x}{1+x^2}\right) & \text{sonst.} \end{cases} & \end{array}$$

### Aufgabe 3 (Punktw. und gleichmäßige Konvergenz). (2+2+3=7 Punkte)

Für  $n \geq 2$  definieren wir eine stetige Funktion  $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 - |nx - 1|, & \text{falls } 0 \leq x \leq \frac{2}{n} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

- (a) Zeichnen Sie die Funktionen  $f_n$  für kleine und für große  $n \geq 2$ , sodass das Konvergenzverhalten sichtbar wird.
- (b) Zeigen Sie:  $f_n$  konvergiert punktweise gegen 0, d. h. für alle  $x \in [0, 1]$  gilt  $f_n(x) \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ .
- (c) Konvergiert  $f_n$  auch gleichmäßig gegen 0?

**Aufgabe 4 (Grenzwert unstetig).**

*(3 Punkte)*

Finden Sie ein Beispiel für eine Folge stetiger Funktionen, die punktweise gegen eine unstetige Funktion konvergieren.

**Aufgabe 5 (Gleichmäßige Stetigkeit der Wurzelfunktion).**

*(3 Punkte)*

Zeigen Sie nur mithilfe der Definition: Die Funktion  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{x}$ , ist gleichmäßig stetig.