Prof. Dr. B. Schweizer
Klaas Poelstra, M. Sc.

Technische Universität Dortmund
Wintersemester 2019/20

Analysis I
Blatt 8

Abgabe bis Montag, 9. Dezember 2019, 14:00 Uhr

Aufgabe 1 (Zwischenwertsatz mit Intervallschachtelung). *(6 Punkte)*

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) < 0 < f(b)$. Zeigen Sie: Es gibt ein $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = 0$.

Anleitung: Definieren Sie induktiv eine Folge $[a_n, b_n] \subset [a, b]$ von Intervallen durch

$$[a_1, b_1] := [a, b]$$
$$[a_{n+1}, b_{n+1}] := \begin{cases} [a_n, m_n], & \text{falls } f(m_n) \geq 0\,, \\ [m_n, b_n], & \text{falls } f(m_n) < 0\,, \end{cases}$$

wobei $m_n := \frac{a_n+b_n}{2}$ und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie dann, dass es ein $x_0 \in [a, b]$ gibt mit $a_n \to x_0$ und $b_n \to x_0$ für $n \to \infty$ sowie $f(x_0) = 0$.

Aufgabe 2 (Temperatur auf dem Äquator). *(4 Punkte)*

Die Temperatur auf dem Äquator sei beschrieben durch eine stetige Funktion $T : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ mit $T(0) = T(2\pi)$.

Zeigen Sie: Es gibt gegenüberliegende Punkte auf dem Äquator, die dieselbe Temperatur haben, d. h. es gibt $x_1, x_2 \in [0, 2\pi]$ und $x_2 = x_1 + \pi$ mit $T(x_1) = T(x_2)$.

Aufgabe 3. *(1+4=5 Punkte)*

Für die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gelte $f(0) = 1$ sowie

$$f(x + y) \leq f(x)f(y) \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}\,.$$

(a) Geben Sie ein Beispiel einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, welche diese Eigenschaften erfüllt

(b) Zeigen Sie: Ist f im Nullpunkt stetig, so ist f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.

Aufgabe 4. *(3+2=5 Punkte)*

(a) Sei $[a, b]$ ein Invervall und $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen mit

$$f(a) > g(a) \quad \text{und} \quad f(b) < g(b)\,.$$

Zeigen Sie, dass es ein $x_0 \in [a, b]$ gibt mit $f(x_0) = g(x_0)$.

(b) Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$\frac{1}{1+x^2} = \sqrt{x}$$

eine Lösung $x_0 > 0$ besitzt. Skizzieren Sie dazu zunächst die Graphen der Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) \coloneqq \frac{1}{1+x^2}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) \coloneqq \sqrt{x}$ für $x > 0$.